

線形代数 3 演習問題

4-1. $C[-1, 1]$ を閉区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数のなすベクトル空間とする。

次の式で与えられる $v_1, v_2, v_3 \in C[-1, 1]$ を考える：

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = e^x \quad (x \in [-1, 1]).$$

この 3 つの関数によって張られる $C[-1, 1]$ の部分空間を V とおく。以下の問いに答えよ。

(1) “ v_1, v_2, v_3 ” は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ。

(2) $C[-1, 1]$ 上に次の式で与えられる内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を導入する：

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in C[-1, 1]).$$

この内積を V に制限することで V を内積空間とみる。このとき、 V の基底 “ v_1, v_2, v_3 ” にグラム-シュミットの直交化法を適用して、 V の正規直交基底を作れ。

4-2. $M_2(\mathbb{C})$ を

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^* A) \quad (A, B \in M_2(\mathbb{C}))$$

により定義されるエルミート内積を持つエルミート計量空間とみなす。 $M_2(\mathbb{C})$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

■ 演習 3-1 について

内積の計算において複素共役を取り忘れている答案が大変多かったです。

まず、 L への正射影 $\mathbf{p}$ は公式 $\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$ によって求めることができます。計算により、

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma i}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

のように求められます。次に、 W への正射影 $\mathbf{q}$ を求めます。 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ であることから、公式

$$\mathbf{q} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}$$

を使って求めることができます。波線部分のない答案がありましたが、これが成り立っていない場合には上の公式は成立するとは限らないので、略すことはできません。計算結果は、

$$\mathbf{q} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma i}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} + \frac{\alpha + 2\beta i - \gamma i}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha - \gamma i \\ 2\beta \\ \alpha i + \gamma \end{pmatrix}$$

となります。

■ 演習 3-2 について

(1) 偏微分の簡単な計算により、 $\langle X^3, g(X, Y) \rangle = 6a$, $\langle X^2Y, g(X, Y) \rangle = 2b$, $\langle XY^2, g(X, Y) \rangle = 2c$, $\langle Y^3, g(X, Y) \rangle = 6d$ のようになることがわかります。

(2) (1) により、 $i \neq j$ を満たす $i, j = 0, 1, 2, 3$ に対して、 $\langle X^i Y^{3-i}, X^j Y^{3-j} \rangle = 0$ となることがわかります。したがって、 $\mathbb{R}^{(3)}[X, Y]$ の基底 “ X^3, X^2Y, XY^2, Y^3 ” は $\mathbb{R}^{(3)}[X, Y]$ の直交系をなします。 $\langle X^3, X^3 \rangle = 6$, $\langle X^2Y, X^2Y \rangle = 2$, $\langle XY^2, XY^2 \rangle = 2$, $\langle Y^3, Y^3 \rangle = 6$ であるため、ノルムで割った “ $\frac{X^3}{\sqrt{6}}, \frac{X^2Y}{\sqrt{2}}, \frac{XY^2}{\sqrt{2}}, \frac{Y^3}{\sqrt{6}}$ ” は $\mathbb{R}^{(3)}[X, Y]$ の正規直交基底になります。

■ 第 3 回学習内容チェックシートについて

- Q1(1) は V のベクトル “ $v_1, \dots, v_n$ ” が V を張ることの定義を書く問題です。単に “ $v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$ ($t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$)” とだけ書かれたシートがいくつかありました。これは v が $t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$ に等しいとしか言っていないので、 V を張ることの定義になっていません。適切な言葉を補って、正しい定義を文章で書いてください。
- Q1(5) は正規直交基底の定義を書く問題です。問われているのは「定義」であり、その言い換えではありません。したがって、「 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) を満たす V の基底 “ $v_1, \dots, v_n$ ” のこと」のように答える必要があります (波線部分は省略できません)。
- Q2(2) の $\langle g_n, g_{n'} \rangle$ の値が正しくないものが多かったです。注意してほしいのは、整数 n, n' を 0 以上 としているところです。 $n = n'$ のときは $n = 0$ のときと $n \geq 1$ のときとで値が異なります。 $\langle g_n, g_{n'} \rangle$ の値は、「 $n \neq n'$ のとき」「 $n = n' \geq 1$ のとき」「 $n = n' = 0$ のとき」の 3 つの場合に分けて書いてください。[例 3-2-2] や [例 1-4-2] が参考になります。

■ 次回予告

次回は最良近似ベクトルの応用として、連続関数の最小 2 乗近似と、解を持たない連立一次方程式の近似解の求め方を学びます。

線形代数3・第4回(2025年4月28日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。