

線形代数 4 演習問題

4-1. 次の 6 次正方行列 A の行列式の値は $(2!3!4!5!)^2$ であることを示せ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1! & 2! & 3! & 4! & 5! \\ 1! & 2! & 3! & 4! & 5! & 6! \\ 2! & 3! & 4! & 5! & 6! & 7! \\ 3! & 4! & 5! & 6! & 7! & 8! \\ 4! & 5! & 6! & 7! & 8! & 9! \\ 5! & 6! & 7! & 8! & 9! & 10! \end{pmatrix}$$

4-2. 頂点が $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 内の四面体の体積をベクトルの外積を用いて求めよ。

■ 第 3 回学習内容チェックシートについて

○ Q1(4) は、「 $\sigma \in \mathfrak{S}_m, \tau \in \mathfrak{S}_n$ のとき」と書いて答えた人がいましたが、「 σ, τ がともに n 文字の置換である」という前提のもとで $\sigma = \tau$ となるための条件を教えてください。

○ Q1(5)(i) では 1, 3, 2, 4 という誤答、(ii) では $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ という誤答が多かったです。[例 3-1-1] に例示されているように、置換と順列との対応は、

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow "i_1, i_2, \dots, i_n" \in S_n$$

により与えられます。よって、 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する順列は 3, 4, 2, 1 であり、順

列 5, 4, 3, 2, 1 に対応する置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ になります。

○ Q3(2) では、長さ 2 の巡回置換という解答が一定数ありました。単に互換とは？と問われればこの答えでよいのですが、 $(i\ j)$ と具体的に指定されているので、「 i を j に写し、 j を i に写し、 i, j 以外の k については k を k に写す置換のこと」のように答えましょう。

■ 演習 3-1 について

正答率は高かったですが、(1) と (2) は理由が書かれていない答案が多かったです。(1) の正解の 1 つは $\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 7\ 8)$ です。理由は、[例 3-4-2] を真似て書けばよいでしょう。(2) は巡回置換を互換の積に分解する公式 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\cdots(i_{k-1}\ i_k)$ を用いればよく、 $\sigma = (1\ 6)(6\ 4)(2\ 3)(3\ 7)(7\ 8)$ のように表わすことができます。(3) は (2) により σ は 5 個の互換の積で表わされることから、 $\text{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$ となります。

■ 演習 3-2 について

方針としては、① σ を順列とみなして転倒数 $N(\sigma)$ を計算する、② σ を互換の積に表わす、の 2 通りがあります。この問題の場合、圧倒的に①の方が簡単です。 σ を順列とみなしたものは " $n+1, n+2, \dots, 2n, n, n-1, \dots, 1$ " です。 $i = 1, \dots, 2n$ とし、この順列において i よりも左側にあって i よりも大きな数字の個数を N_i とおくと、その値が次のように求まります。

$$N_1 = 2n-1, N_2 = 2n-2, \dots, N_n = n, N_{n+1} = \dots = N_{2n} = 0.$$

したがって、 $N(\sigma) = (2n-1) + (2n-2) + \dots + n = \frac{n(3n-1)}{2}$ であり、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ となります。より詳しく値を求めるなら n を mod 4 で場合分けします。すると、 $\text{sgn}(\sigma)$ は、 $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ のとき 1 であり、 $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ のとき -1 であることがわかります。

②の方針をとる場合、初めから n の偶奇で場合分けする必要があります。 n が偶数なら σ は $\frac{n}{2}$ 個の長さ 4 の巡回置換の積で表されることがわかり、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{3n}{2}}$ が得られます。 n が奇数なら σ は $\frac{n-1}{2}$ 個の長さ 4 の巡回置換と 1 個の互換 $(\frac{n+1}{2}, n + \frac{n+1}{2})$ の積で表わされることがわかり、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{3\frac{n-1}{2}+1} = (-1)^{\frac{3n-1}{2}}$ が得られます。

■ 次回予告

次回からベクトル空間の一般論を学んでいきます。今回は、ベクトル空間の定義と代表例、一次独立の概念を取り上げます。

線形代数4・第4回(2025年10月13日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。