No.4 2026年4月30日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

4-1. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt[3]{5}}\left(\cos\frac{x^3-1}{9}\pi\right)$ を求めよ (求める際に用いた根拠がわかるように書くこと)。

4-2. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ $(x\neq 1)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) (x,y)-座標平面上に、関数 $y=f(x)$ のグラフを描け。さらに、その図から関数 $f(x)$ は連続と判断できるか否かを答えよ。

(2) 関数 $f(x)$ を 2 つの連続関数の合成で表わして、$f(x)$ が連続であることを示せ。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.4]

2026 年 4 月 30 日発行

■ 第３回学習内容チェックシートについて

- Q1(2) は、0 と -1 が $S=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>1\}\cup\{0\}$ の集積点か否かを答える問題でした。0 は S の集積点でなく、-1 は集積点であるというのが正解ですが、答えが逆になっているものが少なからずありました。0 が S の集積点でないのは 0 の十分近くには S の元が 0 しかないからであり、-1 が S の集積点なのは $x_n=-1-\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ のように -1 のいくらでも近くに S の元が存在するからです。
- Q3 の出来は悪かったです。極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在するということは、a に収束するようなどのような数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (但し、すべての n について $x_n\neq a$ で $x_n\in S$) に対しても極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ がある一定の値をとるということですから、そうでないことを示すには、a に収束する S 内の 2 つの数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (但し、各項は a でないもの) であって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)$ となるものを具体的に与えればよいことになります。
- Q4 における 2 番目から 4 番目の小さい枠内に、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x),\ \lim_{x\to a}g(x)$ を無理矢理書き込んだシートが多々ありましたが、α,β を使って書けば余裕で収まります。この問題に限らず、与えられている枠からはみ出さないように解答を書くようにしてください。

■ 演習問題 3-2(1) について

正解と不正解が半々ぐらいでした。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使うために、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-\sqrt{2}x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sqrt{2}x)}{\sin(3x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}x}{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}}{\dfrac{\sin(3x)}{3x}}$$

のように書き換えます。$x\to 0$ のとき、$\sqrt{2}x\to 0$ であり $3x\to 0$ であるため、先の等式により与えられた極限は存在して $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ になることがわかります。

■ 演習問題 3-2(2) について

正弦関数のグラフの形から、実数 x をいくら大きくしていっても $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ は 0 と 1 の間を行ったり来たりし続けて一向に特定の値に近づいていかないので、極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ は存在しないことが予測できます。このことは多くの人が把握できていたのですが、ここで終わりにせず、チェックシートの Q3 や [例 3-1-2] の後半の証明のように、$+\infty$ に発散する 2 つの数列を与えることにより、極限が存在しない理由を書いてください。一例として、$x_n=(2n+1)\pi$ $(n=1,2,\cdots)$ と $y_n=2n\pi$ $(n=1,2,\cdots)$ により与えられる数列があります。それらはどちらも $+\infty$ に発散しますが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{x_n}{2}\right|=1,\ \lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{y_n}{2}\right|=0$ となり、関数 $f(x)=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ に代入すると異なる値に収束するため、極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ は存在しないことが定義に基づいて示されます。

■ 次回予告

次回はいよいよ、微分が登場します。三角関数や指数関数が微分可能な関数であることを学びます。後半では、積の微分法則 (ライプニッツの公式) と合成関数の微分公式を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 4 回 (2026 年 4 月 30 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。