

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

4-1. 関数 $f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) について、次の各極限が存在するかどうかを調べよ。存在する場合には、その極限も求めよ。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \qquad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$$

4-2. 次の 2 変数関数のグラフを描け。

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

$$(2) g(x, y) = \sqrt{9 - x^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, -3 \leq x \leq 3)$$

2025 年 10 月 15 日発行

■ 第3回学習内容チェックシートについて

○ Q1 の 2 番目では、合成関数 $g \circ f$ の定義が問われているのですが、「関数 $h(x)$ が $h(x) = g(f(x))$ ($x \in S_1$) によって定まる」という解答が少なからずありました。「 $h(x) = g(f(x))$ ($x \in S_1$) によって定まる関数 h のことを $g \circ f$ で表わし、合成関数という」のように、何が合成関数なのかをはっきりと書かなければなりません。

○ Q2 の第 1 項目では $\sin$ という記号に戸惑った人がいたようです。 $\sin$ は実数 x を入力すると $\sin x$ が出力されるような、 $\mathbb{R}$ を定義域とする関数のことです。正弦関数は x を伴って $\sin x$ という形で書かれることが多いですが、関数としての機能を強調したいときには、 x を外して $\sin$ 単独で表現します。したがって、Q2 の 1 番目の枠には関数 $6f^2 + 2\sin$ に実数 $\frac{\pi}{2}$ を入力したときに出力される実数を書き入れます。定義により、出力される実数は

$$(6f^2 + 2\sin)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

となります。上記の枠にはこの右辺を計算した値を書き入れてください。

○ Q2 の 8 番目から 14 番目の枠では x と a を混同しているものが多かったです。

■ 演習 3-1 について

よくできていました。(1) も (2) も同じ関数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$ ($x^2 + 3x + 2 \neq 0$) の極限を求める問題ですが、(1) と (2) では近づく値が異なります。(1) では x を 2 に近づけたときの極限を求めます。その際、 $f(x)$ の分母 $x^2 + 3x + 2$ は 0 でない値に収束するので、商の極限公式をすぐに適用できます。一方、(2) では x を -1 に近づけるため、 $f(x)$ の分母は 0 に収束します。そのため、このままでは商の極限公式は使えません。分子と分母が $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ のように因数分解できることを用いて、約分してから商の極限公式を適用します。計算結果は (1) が $-\frac{1}{4}$, (2) が -4 になります。

■ 演習 3-2 について

この問題もよくできていました。(1) も (2) も関数が積の形をしているので、まずはライプニッツの公式を適用します。その次に、合成関数の微分法を用いて、計算を行います。(1) では $(e^{-\frac{x}{2}})' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ が正しいのですが $-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ としている答案が数枚ありました。(2) では $\left((\log(5x))^3\right)'$ の計算ミスがやや多かったです。

正解は、 $f'(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $g'(x) = (\log(5x))^2 \left(2x \cos(x^2) \log(5x) + \frac{3}{x} \sin(x^2)\right)$ になります。 $f'(x)$ については、 $-x^2 + 6x - 5$ の部分は $-(x-1)(x-5)$ のように因数分解できるので、その形で答えることもできます。必要以上に行う必要はありませんが、単に公式に当てはめて終わりにせずに、簡単に計算できるものは計算を実行し、見てすぐにくくりだせる項があればそれをくくりだすなど、最終的な答えはある程度整理した形にしましょう。

■ 次回予告

今回は偏微分の定義と計算方法を学びます。偏微分とは、 x, y についての 2 変数関数に対して、片方の変数を定数とみなして微分することを意味します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) ・ 第 4 回 (2025 年 10 月 15 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。