No.4 2026 年 10 月 15 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

4-1. 関数 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ について、次の各極限が存在するかどうかを調べよ。存在する場合には、その極限も求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2})} f(x,y)$

4-2. 次の 2 変数関数のグラフを描け。

(1) $f(x,y)=(|x|+1)\sqrt{1-y^2}\quad(x\in\mathbb{R},\ -1\leq y\leq 1)$

(2) $g(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\leq\pi^2)$

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信　[No.4]

2026 年 10 月 15 日発行

■ 第３回学習内容チェックシート Q2 の表の 2 番目について

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ が成り立つときに Maclaurin 展開可能という解答がありました。それはそうなのですが、ここで尋ねているのは、どんなことが成立すればこの等式が成り立つか、ということです。何回でも微分可能な関数は、いつでも、第 n 次 Maclaurin 展開した式 (3-3 b) で表わすことができます。ここで、その剰余項 $R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ が、n を ∞ に飛ばしたときに 0 に収束すれば、$f(x)$ を最初に述べたようなべき級数の形では表わすことが可能になります ([例 3-3-1] の証明を参照)。チエックシートの解答欄にはこのことを書いてください。

■ 演習 3-1 について

数値自体はあっているもののの、記述や導出過程に難がある答案が多かったです。多かったのは、a_n を x が含まれる形で置いて、ダ・ランベールの判定法を適用するというものですが、それを行なっても直ちに収束半径が決定できるわけではありません。べき級数の収束半径を求めるには [定理 3-2-3] を用いますが、その証明を読めばわかるように、やや込み入った議論の末に、定理の公式が導かれていることに注意してください。

(1) のべき級数の収束半径を求める際には、$a_n=\frac{(n+1)^n}{n!}$ とおいて $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ を計算します。a_n は正なので絶対値は結果として不要ですが、定理を適用する上では必要です。$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ より、収束半径は $\frac{1}{e}$ であることがわかります。

(2) のべき級数には 3 の冪乗の項しか現れないので、すぐに定理を適用することができません。そこで、$y=x^3$ とおき、一旦、y についてのべき級数 $\sum_{m=0}^{\infty}m(-2)^m y^m$ に書き換えます。それでも初項は 0 なので定理の条件を満たさないのですが、収束半径に影響しません。したがって、$b_m=m(-2)^m$ $(m=1,2,\cdots)$ と置いて $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right|$ を計算し、その逆数をとることでべき級数 $\sum_{m=0}^{\infty}m(-2)^m y^m$ の収束半径 $\frac{1}{2}$ を求めることができます。$y=x^3$ とおいていたので、実数 y_0 における級数 $\sum_{m=0}^{\infty}m(-2)^m y_0^m$ の収束・発散は、$x_0=\sqrt[3]{y_0}$ における級数 $\sum_{m=0}^{\infty}m(-2)^m x_0^{3m}$ の収束・発散と同じなので、元のべき級数の収束半径は $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ になることがわかります。

■ 演習 3-2 について

(1) の Maclaurin 級数展開は、倍角の公式から従う等式 $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ に、余弦関数 $\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$ の Maclaurin 級数展開における x を $2x$ に置き換えた式を代入すれば求められます。よくできていましたが、関数を Maclaurin 級数展開する意義は、その関数を「無限に項が続く (ことも許した) 多項式」で表わすことにあるので、最終的な答えは、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ や $\sum_{m=0}^{\infty}b_m x^{2m}$ などの形 (つまり、x^n の係数が何なのかがすぐに分かる形) に整理してください。(2) はヒントに従って計算して、Maclaurin 級数展開 $\mathrm{Tan}^{-1}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1}$ $(-1<x<1)$ が得られます。x の範囲が $|x|<1$ に制限されることに注意してください。

■ 次回予告

次回は偏微分の定義と計算方法を学びます。偏微分とは、x,y についての 2 変数関数に対して、片方の変数を定数とみなして微分することを意味します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 4 回 (2026 年 10 月 15 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。