No.5 2024 年 5 月 9 日

線形代数 1 演習問題

5-1. (ガウスの消去法)

次の連立一次方程式をガウスの消去法によって解け（連立一次方程式を解く過程は、拡大係数行列の変形によって記述してよい)。

$$\begin{cases} x + y + 2z - w = 1 \\ 3x + 2y + z + w = 2 \\ x - y + \quad + 4w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 3w = 1 \end{cases}$$

5-2. (階段行列と階数)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

について、

(1) A に有限回行基本変形を施して、階段型にせよ。

(2) $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

線形代数１通信 [No.5]

2024 年 5 月 9 日発行

■ 演習 4-1 について

(1) 条件を満たすベクトルの 1 つは、外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ によって与えられます。公式に当てはめて計算すると、$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ となります。

(2) [定理 4-3-4] の証明中の (4-3c) を使って、求めるベクトルの組 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ を見つけることができます。実際、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = 0$ より $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ はどちらも $\mathbf{a}$ に直交し、また、平行ではないので、求めるベクトルの組になっています。波線部分の確認が重要です。

上記の $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 以外にも、条件を満たすベクトルの組は沢山あります。そのうち、外積を用いて求める方法を紹介しましょう。(1) により、$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{a}$ に直交するので、これを $\mathbf{x}$ にとりましょう。このとき、$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ 29 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{y}$ にとります。外積の性質より、$\mathbf{y}$ は $\mathbf{a}$ に直交する $\mathbf{0}$ でないベクトルで、さらに $\mathbf{x}$ にも直交するので、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は平行ではありません。したがって、このように定めた $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ はやはり問題の条件を満たすベクトルの組になります。

■ 演習 4-2 について

この問題は pre4-2 と数字が違うだけです。答えだけ記すと、(1) は点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を通り $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ に垂直な平面、(2) は $x - 4y + 9z - 2 = 0$ となります。(1) において、通る点 P_0 を与えないと平面が 1 つに定まらないため、P_0 の座標を具体的に 1 つ与える必要があります。

■ 第 4 回の学習内容チェックシートについて

ベクトルの表記法ができていないものがまだありますが、それ以外に、Q2 における第 8 番目以降の出来が悪かったです。

第 8 番目の枠には、単に「張られる平面」と書くのではなく、どんなベクトルによって張られるのかも書く必要があります (26 ページの 12 行目を参照)。但し、チェックシートでは $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ ではなく、$s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ の形で表わされるベクトルの全体を問われているので、単にアブストラクトの該当箇所を書き写すと間違えます (実際に、間違っているシートが何枚もありました)。

第 9 番目以降の答えは、第 4-4 節の、「次に、(x, y, z)-座標空間において」で始まる段落から [例 4-4-1] の直前までを読めばわかります。最後の枠には $a(x-1) + b(y-2) + c(z-3)$ を展開した式が入ります。

■ 次回予告

次回は、今回に引き続き、未知数の個数と方程式の個数が等しい場合の連立一次方程式の解法について学びます。このような連立一次方程式を解くには、係数行列の逆行列を利用する方法が有効です。そこで次回は、行列に対する正則性と逆行列の概念を学びます。特に、2 次正方行列と 3 次正方行列に対する逆行列の計算の仕方を理解することが目標です。

線形代数１・第５回 (2024 年５月９日) 演習問題解答シート

学籍番号 ________________ 氏名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。