

線形代数 1 演習問題

5-1. (正則行列)

次の各行列について正則行列かどうかを調べ、正則であれば逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

5-2. (逆行列を用いた連立一次方程式の解法)

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ は正則か? 正則ならば、その逆行列も求めよ。}$$

(2) (1) の結果を用いて、連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 2x + 6y - 3z = 2 \\ -4x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

を解け。

■ 第 4 回の学習内容チェックシート Q3 について

階段型でないと判定した行列の階数が記されていないシートが多かったです。どんな行列も、繰り返し行基本変形を施すことにより、必ず階段型の行列にすることができます！階数というのは、行基本変形の繰り返しで得た階段行列の「段数」(0 でない数が含まれる行の行数) のことなので、どんな行列に対しても階数は定まるのです。ガウスの消去法で具体的な連立一次方程式や行列をたくさん計算していくことで、納得できるようになるでしょう。

例えば、行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考えてみましょう。この行列は階段型ではありません。第 1 列目の第 1 行、第 2 行は 0 ですが、その下の第 3 行は 0 でないからです。そこで、 A に「第 1 行と第 3 行を入れ換える」という行基本変形を施します。すると、 $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が得られます。これも階段型ではありません。第 2 行の $(-\frac{1}{2})$ 倍を第 3 行に加えると、3 行目に 0 を増やすことができますからです。実行すると、 A' は $A'' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形されます。この行列は、行基本変形によって第 2 行に 0 をこれ以上増やすことはできないので、階段型です。そして、この時点で A の階数は 2 とわかります。

同じ要領で、Q3 の表に掲げられた 6 つの行列が階段型かどうかとそれらの階数を求めることができます。零行列はそのまま階段型とみなすため、階段型でないものは 3 番目と 5 番目の行列です。そして、階数は左から順に 2, 1, 1, 0, 2, 2 になります。

■ 演習問題 4-1 について

最終的な答えは $(x, y, z, w) = (-\frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{10}{7}, 2)$ になりますが、単に解いただけでは 0 点になります。ガウスの消去法の考え方に基づいて、アルゴリズムを忠実に実行しなければなりません。特に、前進部分における操作において、① $\times 2 +$ ② $\times (-1)$ などの操作は許されないことに注意してください。ガウスの消去法においては、「軸」と定めた式(拡大係数行列で表現しているときには、行)の定数倍をそれよりも下の式(または行)に加える操作を行って、階段型に変形していかなければなりません。また、後退代入の計算過程を略している人がいましたが、それが書かれていない答えは評価しません。充分時間をかけて事前用練習問題を解き、解き方を理解した上で、授業中はヒントと略解を見ずに演習問題を解くことを強く推奨します。

■ 演習問題 4-2 について

(1) は、最初に「軸」とする行を選択する必要があります。第 2 行を軸に選んだ場合には、「① \leftrightarrow ②」「① $\times 1 +$ ③」「① $\times (-2) +$ ④」「② $\times 1 +$ ③」「③ $\times \frac{1}{4} +$ ④」の順に行基本変形を施すと、階段型の行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られます。(2) の答えは $\text{rank } A = 3$ ですが、事前練習問題 pre4-2(2) の略解に書かれているように、適切な理由を書き添える必要があります。

■ 次回予告

2 次と 3 次の正方行列 A に対して定義された数 $|A|$ は行列式と呼ばれます。今回はその性質を調べ、一般の n 次正方行列 A に対して $|A|$ をどのように定義すればよいかを説明します。

線形代数1・第5回(2026年5月7日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。