No.5 2024年10月24日

線形代数2演習問題

5-1*. (部分空間)

A を n 次正方行列とし、$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$W = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \text{を満たす自然数}\ k\ \text{が存在する}\ \}$$

を考える。W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

5-2. (連立一次方程式の解空間の基底)

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

の実数解のなす解空間 W を求めよ。さらにその基底を1組求めよ。

* 授業中に修正済.

線形代数２通信 [No.5]

2024 年 10 月 24 日発行

■ 第４回学習内容チェックシートについて

- Q1 の最後の 2 つの枠にそれぞれ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}-\mathbf{a}\rangle, \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}-\mathbf{b}\rangle$ が書き込まれたシートが複数枚ありました。方程式の中に $\mathbf{p}$ が含まれていなければ s, t は求められません。$\mathbf{p}$ は $\mathbf{v}$ から $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって張られる平面へ下ろした垂線の足なので、$\mathbf{v}-\mathbf{p}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交します。したがって、最後の 2 つの枠に入るものは、それぞれ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}-\mathbf{p}\rangle, \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}-\mathbf{p}\rangle$ になります。
- Q3 は、「A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在する」という解答がいくつかありましたが、ここには、対角化可能の定義 ((4-3a) の前後を参照) を書いてください。
- Q4 の最後から 2 つ目の枠については、実に様々な誤答がありました。$P, \lambda_i, A,$ 基底 という解答が多かったです。正解は $\mathbf{v}_i$ です。$\mathbf{u}_i$ も間違いではありませんが、$\mathbf{v}_i$ の方が適切です。

■ 演習 4-1 について

(1) いつものように固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算して、固有値を求めます。問題の行列式の場合、第 3 列の 2 倍を第 1 列と第 2 列にそれぞれ加えると、それぞれの列から $x+7$ をくくり出すことができます。次に、第 1 列の 2 倍を第 3 列に加えて第 1 行に関して余因子展開します。これより、$\Delta_A(x) = (x+7)^2(x+16)$ のように因数分解が求められ、A の固有値は $-7, -16$ であることがわかります。

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれについて、固有ベクトルを求めます。-7 に属する固有ベクトルは、連立一次方程式 $(-7E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解き、その実数解から $\mathbf{0}$ を除いて求めます。その結果、$s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R},\ (s,t) \neq (0,0))$ が求まります。この中から一次独立なベクトルの組 “$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$” を選ぶことにします。次に、$-16$ に属する固有ベクトルを求めます。計算して、$t\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ が求まります。この中から $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ を選びます。このようにして、A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底として “$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$” が見つかります。

(3) (2) で求めた基底に、グラム-シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底を作ります。その結果、“$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$” が得られます。

(4) (3) で求めた正規直交基底を並べて行列 $P = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)$ を作ると、これは直交行列です。また、各 i について $\mathbf{u}_i$ は $\mathbf{v}_i$ と同じ固有値に属する固有ベクトルになるため、逆行列を計算することなく、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -16\end{pmatrix}$ になることがわかります。

■ 次回予告

次回は、$\{\mathbf{0}\}$ 以外の任意の部分空間には基底が存在すること、部分空間の基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方によらず一定であることが示されます。一次従属、部分空間の基底と次元、連立一次方程式の解空間の次元について学びます。

線形代数２・第５回 (2024 年 10 月 24 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。