

線形代数 3 演習問題

5-1. 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された実数値連続関数全体のなす実ベクトル空間 $C[-\pi, \pi]$ には、

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad (f, g \in C[-\pi, \pi])$$

により内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定まる。 $v_0, v_1, v_2 \in C[-\pi, \pi]$ を

$$v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad v_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad v_2(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

により定めると、これらは上記の内積に関して正規直交系をなす(このことは既知としてよい)。

f を $f(x) = e^{-x}$ によって定義される $[-\pi, \pi]$ 上の関数とする。

- (1) f を v_0, v_1, v_2 の一次結合で表される関数で最小 2 乗近似して得られる関数 g を求めよ。
- (2) (1) の関数 g は、どのような空間の中で、何の値が最小となるような f の近似か。

5-2. i を虚数単位とし、行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \\ 3i & 1 \end{pmatrix} \in M_{32}(\mathbb{C})$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) A^*A が正則かどうか調べよ。正則な場合には、その逆行列も求めよ。
- (2) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の最小 2 乗解を求めよ。

■ 演習 4-1 について

(1) 残念ながらあまり出来ていませんでした。まず、 $t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = 0_V$ ($t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$) とおき、この等式に $x \in [-1, 1]$ を代入して実数としての等式 $t_1 + t_2 x + t_3 e^x = 0$ を作ります。さらに、 $x = 0, 1, -1$ を代入して 3 つの等式を導いて、連立させて解くことにより $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ が得られます。このようにして、“ v_1, v_2, v_3 ” は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることが示されます。その際、連立方程式を解く過程は略さずに書かなければなりません。

(2) w_1, w_2, w_3 を v_1, v_2, v_3 にグラム-シュミットの直交化法を適用して構成される互いに直交するベクトルとします。すると、 $w_1 = v_1$ であり、 $\langle v_2, w_1 \rangle = 0$ より $w_2 = v_2$ となります。さらに、 $\langle w_1, w_1 \rangle = 2$, $\langle w_2, w_2 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle v_3, w_1 \rangle = e - e^{-1}$, $\langle v_3, w_2 \rangle = 2e^{-1}$ より $w_3 = v_3 - \frac{e - e^{-1}}{2} v_1 - 3e^{-1} v_2$ となることがわかります。あとは、 $\langle w_3, w_3 \rangle$ を計算すれば $u_i = \frac{w_i}{\sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}}$ ($i = 1, 2, 3$) によって正規直交基底が得られます。

$\langle w_3, w_3 \rangle$ の値を正確に求めることができた人はいませんでした。これは内積の性質を使って、以下のように計算することができます：

$$\begin{aligned} \langle w_3, w_3 \rangle &= \langle v_3, v_3 \rangle + \left(\frac{e - e^{-1}}{2} \right)^2 \langle v_1, v_1 \rangle + 9e^{-2} \langle v_2, v_2 \rangle \\ &\quad - (e - e^{-1}) \langle v_1, v_3 \rangle - 6e^{-1} \langle v_2, v_3 \rangle + 3e^{-1} (e - e^{-1}) \langle v_1, v_2 \rangle = -5e^{-2} + 1. \end{aligned}$$

■ 演習 4-2 について

W は “ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ” を基底に持ちます。このことから、pre4-2 のヒントと略解と同様にして、 $W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid x, y \in \mathbb{C} \right\}$ であることがわかります。

■ 第 4 回学習内容チェックシートについて

- Q2(1) は直和の定義を書く問題です。定義は [定義 4-2-1] にありますが、問題文の状況に合わせて答える必要があります。「和空間 $U + W$ の任意の元が $u + w$ ($u \in U, w \in W$) の形に一意的に表わされるとき U, W は V の中で直和であるという」のように答えましょう。
- Q2(3) では $U \oplus W = V$, $\dim(U \oplus W) = \dim V$ という解答がありました。 $V = U + W$ なら正しいですが、一般には $U \oplus W = U + W$, $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$ となります。
- Q3(2) に答えるには、第 4-4 節のほか [補題 3-3-1(2)] も見る必要があります。直和分解 $V = W \oplus W^\perp$ の下で v を $v = p + u$ ($p \in W, u \in W^\perp$) と表わしたときの p が v の W への正射影ですが、求め方はわかりません。この p を具体的に求めるには、 W の正規直交基底 “ $u_1, \dots, u_k$ ” を一組とって (3-3b) を用います。
- Q3(3) は、設問の指示（まず不等式を書き、その次に、その不等式の意味を説明する）に従っておらず、さらに、不等式の意味が書かれていない解答も多かったです。書くべき不等式は [定理 4-4-1] における最後の不等式ですね。これはよく出来ていました。その不等式の意味については、[定理 4-4-1] の 2 行上に書かれていますので、それを書いてください。

■ 次回予告

次回から、有限次元計量空間 V 上の線形変換に対する正規直交基底による対角化問題を扱っていきます。今回は正規直交基底と密接に関わるユニタリ行列とユニタリ変換を取り上げます。

線形代数3・第5回(2025年5月12日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。