 2025 年 10 月 20 日

線形代数 4 演習問題

5-1. 実数係数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ における多項式

$$f_1 = 1 + 3x + 9x^2, \quad f_2 = 1 + 5x + 25x^2, \quad f_3 = 1 + 7x + 49x^2$$

を考える。

(1) $(f_1\ f_2\ f_3) = (1\ x\ x^2)A$ を満たす 3 次正方行列 A を求めよ。

(2) 組 "f_1, f_2, f_3" は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ。

5-2. a, b, c を 0 でない実数の定数とし、次のように定義される 3 つの等比数列

$$\boldsymbol{v}_1 = \{a^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \{b^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \{c^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$$

を考える。実数列全体のなす実ベクトル空間 $V = \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ において、組 "$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$" が $\mathbb{R}$ 上一次独立となるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。

線形代数４通信 [No.5] 2025 年 10 月 20 日発行

■ 第４回学習内容チェックシート Q4(2) について

結論から言えば、(1) の関係式 $|AB| = |A| \cdot |B|$ は、線形写像 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ によって平行体の (符号つき) 体積が $|A|$ 倍されることを意味するわけですが、この説明では $|B|$ がどう関係するのかが不明です。「B の列ベクトルによって張られる平行体を P とすると、線形写像 T_A によって P は AB の列ベクトルによって張られる平行体に写される。P, $T_A(P)$ の (符号つき) 体積はそれぞれ $|B|$, $|AB|$ なので、(1) の関係式は $\cdots\cdots$ を意味する」のように書きましょう。

■ 演習 4-1 について

まず、$|A|$ において、第 5 行の -5 倍を第 6 行に加え、第 4 行の -4 倍を第 5 行に加え、$\cdots$ 第 1 行の -1 倍を第 2 行に加えて、第 1 列に関して余因子展開を行います。すると、第 j 列 ($j = 2, 3, 4, 5$) から j を括り出すことができるので、$|A|$ は次の値になります。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1! & 2! & 3! & 4! & 5! \\ 0 & 1! & 2\cdot 2! & 3\cdot 3! & 4\cdot 4! & 5\cdot 5! \\ 0 & 2! & 2\cdot 3! & 3\cdot 4! & 4\cdot 5! & 5\cdot 6! \\ 0 & 3! & 2\cdot 4! & 3\cdot 5! & 4\cdot 6! & 5\cdot 7! \\ 0 & 4! & 2\cdot 5! & 3\cdot 6! & 4\cdot 7! & 5\cdot 8! \\ 0 & 5! & 2\cdot 6! & 3\cdot 7! & 4\cdot 8! & 5\cdot 9! \end{vmatrix} = 5! \begin{vmatrix} 1 & 2! & 3! & 4! & 5! \\ 2! & 3! & 4! & 5! & 6! \\ 3! & 4! & 5! & 6! & 7! \\ 4! & 5! & 6! & 7! & 8! \\ 5! & 6! & 7! & 8! & 9! \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots (*)$$

次に、第 4 行の -5 倍を第 5 行に加え、$\cdots$ 第 1 行の -2 倍を第 2 行に加えて、第 1 列に関して余因子展開を行います。同じ要領で続けて計算していくと、次のように $|A|$ の値が $(2!3!4!5!)^2$ になることがわかります。

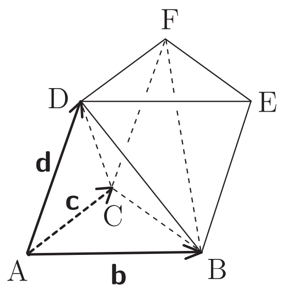
$$(*) = 5!4! \begin{vmatrix} 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \\ 4! & 5! & 6! & 7! \\ 5! & 6! & 7! & 8! \end{vmatrix} = 5!4! \begin{vmatrix} 2! & 3! & 4! & 5! \\ 0 & 3! & 2\cdot 4! & 3\cdot 5! \\ 0 & 4! & 2\cdot 5! & 3\cdot 6! \\ 0 & 5! & 2\cdot 6! & 3\cdot 7! \end{vmatrix} = 5!4!3!2! \begin{vmatrix} 3! & 4! & 5! \\ 4! & 5! & 6! \\ 5! & 6! & 7! \end{vmatrix}$$

$$= (5!4!3!2!)2!3! \begin{vmatrix} 4! & 5! \\ 5! & 6! \end{vmatrix} = (5!4!3!2!)2!3! \begin{vmatrix} 4! & 5! \\ 0 & 5! \end{vmatrix} = (2!3!4!5!)^2.$$

■ 演習 4-2 について

四面体 ABCD の体積は、

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



によって張られる平行六面体の体積の 6 分の 1 になります。(右図のように、(斜) 三角柱 ABC-DEF を 3 つの四面体 ABCD, BCDF, BDEF に分割することにより、四面体 ABCD の体積は (斜) 三角柱 ABC-DEF の体積の 3 分の 1 になることがわかります。(斜) 三角柱の体積は平行六面体の体積の半分なので、四面体の体積は平行六面体の体積の 6 分の 1 になるわけです。)

$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので、求める四面体の体積は、$\dfrac{1}{6}|\langle \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle| = \dfrac{1}{6}|6| = 1$ になります。

■ 次回予告

次回は基底と次元の一般論を学びます。基底の延長定理 (一次独立なベクトルの組が与えられたとき、それにいくつかベクトルを付け加えて基底が得られるという定理) を証明します。

線形代数4・第5回 (2025年10月20日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。