

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

5-1. 次の各関数について偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0).$

但し、 Tan^{-1} は $\tan(x)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である。逆関数の微分法により、
 $(\text{Tan}^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) となる。この等式は使ってよい。

(2) $g(x, y) = \log(y + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (|x| > 1, y > 0)$

5-2. 関数

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}e}y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

の極値を与える点の候補を求めよ。

2025 年 10 月 22 日発行

■ 第4回の学習内容チェックシートについて

- $f_3(x)$ のグラフの図が「妖しい」ものが多かったです。手前は実線、奥は破線を用いるなど、工夫して描きましょう。アブストラクトの図を更新しました。再度よく観察して描き直してください。
- Q2 の表の最後の解答では、 $(a, b) \in D$ で連続であることと同じことを書いたものや、「 f は D 上で連続である」と書いたものが多数ありました。どの点で連続なのかが明記されていない場合、定義域内のすべての点で連続なことを意味します。したがって、「すべての点 $(a, b) \in D$ で f が連続であるときをいう」のように解答してください。
- Q3 は、関数 $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) と定値関数 $1(x, y) = 1$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) が連続であることを使って、理由を書いてください。 $f(x, y) = \frac{p(x, y)q(x, y)}{p(x, y)^2 + 1(x, y)}$ のように表わし、連続関数の和差積商は連続であるから、 f も連続である、のように答えましょう。なお、「 x, y は連続関数なので」という表現を用いた解答も複数ありました。 x, y を 2 変数関数として捉える視点が大切なので、上記の関数 p, q を使って書いてください。

■ 演習 4-1 について

(1) の極限は存在しないのですが、(2) は存在して $\frac{1}{5}$ になります。(2) の方は正答率が低かったため、説明を加えておきます。

極限の存在を示したいとき、(1) のように 2 通りの近づけ方を考えて、それを説明することはできません。平面上の点 (x, y) を $(1, 2)$ へ近づけると、直線 $x = 1$ や直線 $y = 2$ に沿った近づけ方がすぐに思い浮かびますが、放物線 $y = 2x^2$ に沿った近づけ方もあります。どんな近づけ方をしても極限が一定値でなければ、極限が存在するとは言えないので、 $(1, 2)$ への近づけ方が無限にある以上、(1) のような方法では「無理」ということになります。ではどうするかといえば、関数 $f(x, y)$ が $(1, 2)$ において連続であることを利用します。関数 $f(x, y)$ の連続性は、上述の「第4回の学習内容チェックシートについて」の第3項目と同様に考えるとわかるので、 $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ のときの $f(x, y)$ の極限は $f(x, y)$ に $(1, 2)$ を代入するだけで求まります。

■ 演習 4-2 について

(1) の関数は $(0, 0)$ では定義されていないのに、その値があるように描かれているものや、すべての定義域内の点 (x, y) において $f(x, y) > 0$ なのに、グラフが (x, y) -平面上に「載っている」ように描かれているものがありました。また、(2) の関数 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$ ($-3 \leq x \leq 3$) においては、 (x, z) -平面上のグラフとして描かれたものがありました。定義式の中に y がないということは、 y 軸方向には同じ形がずっと続くということです。簡単な 2 変数関数のグラフを図示できるように、配布された解答例を参考に練習してください。

■ 次回予告

授業の最後に説明したように、偏微分を 1 変数の微分の 2 変数版と捉えるには問題があります。次回は、1 変数関数の微分の定義を真似ることにより、2 変数関数に対する全微分の概念を導入します。全微分が 1 変数関数に対する微分に相当する概念であることを説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) ・ 第 5 回 (2025 年 10 月 22 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。