No.5 2026 年 10 月 22 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

5-1. 次の各関数について偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y) = e^{\cos(xy^2)} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

(2) $g(x,y) = x^2 \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2 \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) \quad (xy \neq 0)$.

但し、Tan^{-1} は逆正接関数である。

5-2. 関数

$$f(x,y) = 4x^4 + 3x^2y^2 + xy^3 - 8x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

の極値を与える点の候補を求めよ。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.5]

2026 年 10 月 22 日発行

■ 第４回の学習内容チェックシートについて

- Q2 の表の最後の解答では、「f は D 上で連続である」というものが多数ありました。「どの点で」が明記されていない場合には、定義域内のすべての点で連続なことを意味します。よって、「すべての点 $(a,b) \in D$ で f が連続であるときをいう」と書くのが正解です。
- Q3 については、関数 $p(x,y) = x,\ q(x,y) = y\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ と定値関数 $\underline{1}(x,y) = 1\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ を用いて $f(x,y)$ を $f(x,y) = \frac{p(x,y)q(x,y)}{p(x,y)^2+\underline{1}(x,y)}$ のように表わした後、$p, q, \underline{1}$ が連続であり、連続関数の和差積商は連続であるから、f も連続である、のように答えましょう。「x, y は連続関数なので」という表現もありましたが、x, y を 2 変数関数として捉える視点が大切なので、上記の関数 p, q を使って書いてください。

■ 演習 4-1 について

(1) の極限は存在しませんが、(2) は存在して $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ になります。(2) の正答率が低かったので、説明を加えておきます。

極限の存在を示したいとき、(1) のように 2 通りの近づけ方を考えて、それを説明することはできません。点 (x,y) の $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ への近づけ方には、直線 $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ や $y = x$ に沿う方法以外にも円 $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{4}$ に沿うものなど様々なものがあり、それらを含むどんな近づけ方をしても極限が一定となることを示さなければならないからです。ではどうするかといえば、関数 $f(x,y)$ が点 $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ で連続であることを利用します。これがわかれば、極限は $f(x,y)$ に $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ を代入するだけで求められます。ここで、関数 $f(x,y)$ の連続性は、$p(x,y) = x,\ q(x,y) = y\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ および sin の連続性、連続関数の和差積商が連続であることに加え、連続関数の合成関数が連続であることを使って示すことができます。アブストラクトに合成関数の連続性の結果を記載し忘れていたため、追記して差し替えました。

■ 演習 4-2 について

(1) の関数のグラフは、c を実数の定数として、平面 $x = c$ で切った切り口を観察して描くことができます。その切り口は曲線 $z = (|c| + 1)\sqrt{1 - y^2}$ です。この曲線は、上半円を z 軸方向に引き伸ばした形をしていて、y 座標が ± 1 のところに「足」があります。「頂点」は z 軸上にあり、c が 0 のときに最も低く、0 から遠ざかるほど高くなります。また、平面 $y = c$ によるグラフの切り口は曲線 $z = (|x| + 1)\sqrt{1 - c^2}$ で、これは「V の字」の形をしています。これらの特徴を捉えて、グラフを図示しましょう。(2) の関数のグラフの概形を知るには、半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ で切った切り口を観察します。その切り口は曲線 $z = \sin r\ (0 \leq r \leq \pi)$ になります。これを z 軸のまわりに 1 回転したものが (2) の関数のグラフになります。グラフの具体的な概形は、配布された解答例またはオンデマンド配信中の解説動画を参照してください。

■ 次回予告

授業の最後に説明したように、偏微分を 1 変数の微分の 2 変数版と捉えるには問題があります。次回は、1 変数関数の微分の定義を真似ることにより、2 変数関数に対する全微分の概念を導入します。全微分が 1 変数関数に対する微分に相当する概念であることを説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 5 回 (2026 年 10 月 22 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。