

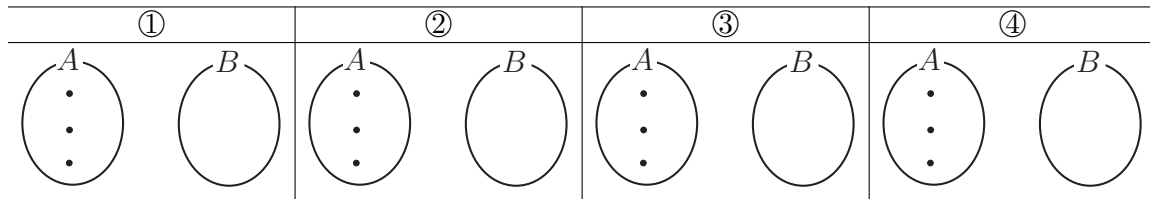
基礎数学演義1 第6回・問題解答&要約シート(1)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q6-1. 集合 A から集合 B への写像 $f: A \rightarrow B$ が

- ① 単射であるが、全射でない
- ② 単射でないが、全射である
- ③ 単射でも、全射でもない
- ④ 単射かつ全射である

という4つの状況を考える。これらの状況を下図を用いてわかりやすく表現しなさい (B の中に適当に有限個の点を打ち、元の対応規則を矢印で表わしなさい)。



Q6-2. 写像 $f: A \rightarrow B$ について、① 単射であることの定義と、② それと同値な言い換えをそれぞれ書け。

①

②

Q6-3. (1) $f(n) = n^2 - n$ ($n \in \mathbb{Z}$) によって定義される写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ について f は全射であるか否かを調べよ。

(2) 写像 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$g(n) = \begin{cases} n+1 & (n \text{ は偶数のとき}), \\ \sqrt{n} & (n \text{ は奇数のとき}). \end{cases}$$

g は単射であるか否かを調べよ。

基礎数学演義1 第6回・問題解答&要約シート(2)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q6-4. 開区間 $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ から開区間 $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ への写像 $f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ を次の式で定義する:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad (0 < x < 1).$$

(1) f は単射であることを示せ。

(2) f は全射であることを示せ。

(3) f の逆写像 f^{-1} を求めよ。

Q6-5. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ は共に全単射であるとする。

(1) 合成写像 $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$ と $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$ はどんな写像か。[補題5-3-3(2)] と [補題6-3-1(1)] を用いてそれぞれを計算せよ。

(2) (1) の計算結果から $g \circ f$ は全単射であって、等式 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ が成り立つことがわかる。その理由を書け。