No.6　　2026 年 5 月 14 日

線形代数 1 演習問題

6-1. (正則性と逆行列)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

は正則かどうかを調べよ。さらに、正則なときには、その逆行列も求めよ。

6-2. (行基本変形と行列の積)

4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

と 4 次正方行列 P と Q を考える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 積 PA と QA を求めよ。

(2) PA および QA は、それぞれ、A からどのような行基本変形を続けて行って得られるか？

線形代数１通信 [No.6]

2026 年 5 月 14 日発行

■ 演習問題 5-1 について

計算ミスが多かったことと途中式のない答案が多かったため、正答率は低かったです。(1) では、逆行列の公式を正しく適用できていない答案が例年になく多かったです。(2) では、単純な計算ミスのほか、逆行列の成分の配置で転置をとっていない答案が複数ありました。

事前練習問題と同様に、まず与えられた行列を A とおき、$|A|$ を計算します。その結果、$|A| \neq 0$ であれば A は逆行列 A^{-1} を持つことがわかり、公式を用いて A^{-1} を求めることができます。

(1) の答えは、$|A| = \frac{2}{15} \underset{\sim\sim\sim}{\neq 0}$ より正則で、$A^{-1} = \dfrac{15}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ となります。

(2) の答えは、$|A| = -161 \underset{\sim\sim\sim}{\neq 0}$ より正則で、$A^{-1} = -\dfrac{1}{161}\begin{pmatrix} -10 & 36 & -33 \\ 36 & -33 & -10 \\ -33 & -10 & 36 \end{pmatrix}$ となります。

波線で強調されている「$\neq 0$」の部分が逆行列を持つ根拠になるので、重要です。強く意識して書くようにしてください。

■ 演習問題 5-2 について

この問題も計算間違いが多く、途中式のない答案が目立ちました。

(1) の答えは、$|A| = 34 \neq 0$ より A は正則で、$A^{-1} = \dfrac{1}{34}\begin{pmatrix} -18 & 14 & -6 \\ 20 & -8 & 1 \\ 28 & -18 & -2 \end{pmatrix}$ となります。$\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{34}$ 倍することを忘れがちなので注意しましょう。

(2) の答えは、$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を計算して、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{34}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{34} \\ -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$ となります。

■ 第５回の学習内容チェックシートについて

よくできていましたが、Q2 の最初の枠に $AX = XA$ や $AX = E_n$ を書き入れたシートが数枚ありました。定義の仕方によっては、$AX = E_n$ も正解になりますが、この授業では $XA = E_n$ を満たすことも条件に加えているので、$AX = XA = E_n$ と書かなければなりません。

■ 次回予告

第５節において、2 次と 3 次の正方行列 A に対して定義された数 $|A|$ は A の行列式と呼ばれます。次回はその性質を調べます。さらに、2 次と 3 次の行列式の間の関係式を導き、一般の n 次正方行列 A に対して $|A|$ をどのように定義すればよいかを説明します。

線形代数1・第6回 (2026年5月14日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。