No.6 2024年10月31日

線形代数2演習問題

6-1. (基底の定義)

W を数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 3 次元部分空間とし、“$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$” を W の基底とする。$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^4$ を

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_3, \qquad \mathbf{u}_2 = 3\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \qquad \mathbf{u}_3 = -\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$$

によって定める。

(1) “$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$” は一次独立であることを示せ。

(2) “$\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$” は W の基底であることを示せ。

6-2. (連立一次方程式の解空間の次元)

$a \in \mathbb{R}$ とする。4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 & 1 \\ -a & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & a \\ -1 & -5 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}$ の次元を求めよ。

線形代数２通信　[No.6]

2024年10月31日発行

■ 第５回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q3の(B1)の解答は、「任意の $\mathbf{x}\in W$ は $\mathbf{x}=t_1\mathbf{w}_1+\cdots+t_d\mathbf{w}_d$ $(t_1,\cdots,t_d\in\mathbb{R})$」で止まっているものが多数ありました。これでは何を言いたいのかわかりません。35ページの条件(B1)の最後まで書く必要があります。
- ◦ Q4の4つの部分集合 W のうち、部分空間になるものは左上の1つだけですが、右上の W に◯を記したシートが結構ありました。右上の W が部分空間でないのは(SS2)を満たさないからで、右下の W が部分空間でないのは(SS1)を満たさないからですが、満たさない反例を挙げてください。

■ 演習 5-1 について

A^k の k の扱いが不十分な解答が多かったです。(SS0)が成立することを示すには、$\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ が W に属すること、すなわち、条件「$A^k\mathbf{0}=\mathbf{0}$ となる $k\in\mathbb{N}$ が存在する」を満たすことを確認します。どんな k でも $A^k\mathbf{0}=\mathbf{0}$ となりますが、k の存在を示さなければいけないので、敢えて $k=1$ をとり、「$A\mathbf{0}=\mathbf{0}$ となるので、$\mathbf{0}\in W$ である」のように書きます。

(SS1)が成立することの証明は、まず、任意に $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$ をとる、と宣言するところから始めます。すると、$A^k\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $A^l\mathbf{y}=\mathbf{0}$ となる $k,l\in\mathbb{N}$ が存在するので、$A^{k+l}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A^{k+l}\mathbf{x}+A^{k+l}\mathbf{y}=A^l(A^k\mathbf{x})+A^k(A^l\mathbf{y})=A^l\mathbf{0}+A^k\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ となります。よって、$\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W$ が示されました。(SS2)が成立することの証明も同様にできるので、各自で書いてみましょう。

■ 演習 5-2 について

与えられた連立一次方程式の係数行列は $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&4\\1&-3&-2&1&2\\2&2&12&-4&7\\-1&2&0&-1&-2\end{pmatrix}$ です。この行列にいつものように行基本変形を施してガウスの消去法を指針として階段型にしていきます。計算の過程は省きますが、A に ①$\times(-1)+$②, ①$\times(-2)+$③, ①$\times 1+$④ を行ってから ②$\times\frac{1}{2}$ を行い、得られた行列に ②$\times 4+$③, ②$\times 1+$④ を行ってから ③$\times\frac{1}{5}$ を行い、さらに ③$\times 1+$④ を行うと、階段行列 $B=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&4\\0&-1&-2&2&-1\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ が得られます。これを連立一次方程式に戻して後退代入で解くことにより、

$$W=\left\{\ s\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}\ \text{とその一組の基底}\ “\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}”$$

が求まります。

■ 次回予告

次回は、簡単に写像の定義を説明した後、線形写像の概念を学びます。行列はそれ自体は数を並べた表に過ぎませんが、ベクトルと掛け算することにより、線形性を持つ写像とみなすことができます。この写像の幾何学的な意味、行列から定まる線形写像について考察します。

線形代数２・第６回 (2024 年 10 月 31 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。