

線形代数 3 演習問題

6-1. 次の 3 次複素正方行列 U がユニタリ行列となるような $a, b, c \in \mathbb{C}$ を求めよ。

$$U = \begin{pmatrix} a & \frac{1+i}{\sqrt{5}} & \frac{1+i}{\sqrt{5}} \\ b & \frac{1+i}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}} \\ c & -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{1+i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

6-2. $\mathbf{p} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とおく。 $\mathbb{R}$ -線形変換 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{p}$ に関する鏡映とする：

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3).$$

但し、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はユークリッド内積を表わす。

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ を

$$\mathbf{a} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

により定義する。 $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 “ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ ” に関する T の行列表示を求めよ。

■ 第 5 回学習内容チェックシートについて

- Q1(2) は [定理 5-1-1] を理解していれば答えられます。「 f の W への正射影を求めれば、それが f の W における最小 2 乗近似関数となる」などを書くといよいでしょう。
- Q1(3)(i) は単に (5-1c) の右辺を書けばよい単純な問題でしたが、被積分関数に $f(x)$ が含まれていない答案が思いの外ありました。
- Q1(3)(ii) は最も出来が悪かったです。問われているのは部分空間なのですが、関係のないことを答えている答案が多かったです。(5-1a) において与えられている $(2n+1)$ 個の関数により張られる $C[-\pi, \pi]$ の部分空間を記入してください。

■ 演習 5-1 について

(1) この問題は数年前の定期試験に出題したのですが、定積分の計算ができていない答案がたくさんあり、極めて出来が悪かったです。

(5-1b) 等により、求める最小 2 乗近似関数 g は

$$g(x) = \langle f, v_0 \rangle v_0 + \langle f, v_1 \rangle v_1 + \langle f, v_2 \rangle v_2 \quad \cdots \cdots \cdots (*)$$

により求めることができます。 $\langle f, v_0 \rangle = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\sqrt{2\pi}}$ はすぐに求められるでしょう。 $\langle f, v_1 \rangle$ と $\langle f, v_2 \rangle$ を計算するには、不定積分

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C, \quad \int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2 \cos 2x) + C$$

(C は積分定数) を用います。これらは部分積分法によって導くことができますが、前者の積分は $(e^{-x} \sin x)'$, $(e^{-x} \cos x)'$ の和を計算して、後者の積分は $(e^{-x} \sin 2x)'$, $2(e^{-x} \cos 2x)'$ の和を計算して求めることもできます。何れにしても定積分を計算し、(*) に代入することにより g は $g(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{5} \sin 2x \right)$ ($x \in [-\pi, \pi]$) により与えられることがわかります。

(2) は、チェックシートの Q1(3)(ii) と同様に、“ v_0, v_1, v_2 ” によって張られる $C[-\pi, \pi]$ の部分空間の中で、 $d(f, g)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx$ が最小となるような f の近似である、と答えればよいでしょう。

■ 演習 5-2 について

単に転置をとって複素共役をとるだけですが、 A^* を正しく計算できていない答案が非常に多かったです。きちんと計算すると $A^*A = \begin{pmatrix} 15 & 2i+5 \\ -2i+5 & 12 \end{pmatrix}$ となります。 $|A^*A| = 151 \neq 0$ となるため、 A^*A は正則です。 A^*A は 2 次なので、その逆行列は公式を用いて簡単に求めることができ、 $(A^*A)^{-1} = \frac{1}{151} \begin{pmatrix} 12 & -2i-5 \\ 2i-5 & 15 \end{pmatrix}$ となります。

(2) は公式 (5-3b) を使って計算するだけです。答えは $\frac{1}{151} \begin{pmatrix} 11+15i \\ 81-17i \end{pmatrix}$ です。

■ 次回予告

次回は、行列 A の随伴行列 $A^* = \overline{A^T}$ の性質を調べます。有限次元計量空間 V 上の任意の線形変換 T に対して、随伴行列の役割りを果たす線形変換 T^* が一意的に存在することを示し、ユニタリ変換の随伴変換を用いた特徴づけを与えます。

線形代数 3・第 6 回 (2025 年 5 月 19 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。