

線形代数 4 演習問題

6-1. $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) “ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ” は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ。
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ にベクトルをいくつか付け加えて、 $\mathbb{R}^4$ の基底を作れ。

6-2. V を $\mathbb{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間とする。 V は自然な方法で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすことができる (スカラー倍を実数だけに制限すればよい)。

“ v_1, v_2 ” が $\mathbb{C}$ 上の V の基底ならば、

$$“u_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}v_1, u_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}v_1, u_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}v_2, u_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}v_2, ”$$

は $\mathbb{R}$ 上の V の基底であることを示せ。ここで、 i は虚数単位である。

■ 第 5 回学習内容チェックシートについて

- Q2(4) は相変わらず出来が悪かったです。写像を定めるときには、①定義域、②終域、③元の対応規則の 3 点を明示しなければなりません。例えば、 $0_{\text{Map}(S, \mathbb{K})}$ については $0_{\text{Map}(S, \mathbb{K})} : S \rightarrow \mathbb{K}, 0_{\text{Map}(S, \mathbb{K})}(s) = 0 (s \in S)$ のように書いてください。
- Q3(1) も過去に出題した問題ですが、出来ていませんでした。“ $v_1, \dots, v_m$ ”の $\mathbb{K}$ -一次結合とは、 $t_1 v_1 + \dots + t_m v_m (t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K})$ の形で表わされた V のベクトルを指しています。
- Q3(2)(ii) は一次独立でないことを肯定文に言い換えた文章を書く問題でした。“ $v_1, \dots, v_m$ ”が一次独立であることの否定は、 $t_1 v_1 + \dots + t_m v_m = 0_V$ を満たす $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$ の中に「 $t_1 = \dots = t_m = 0_V$ ではないものがある」ということですから、「 $t_1 v_1 + \dots + t_m v_m = 0_V$ を満たす同時には 0 でない $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$ が存在する」のように解答してください。

■ 演習 5-1 について

(1) の正解は $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 25 & 49 \end{pmatrix}$ です。(2) では $\text{rank } A$ が 3 になることを確かめれば十分で

したが、無闇に連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いた人もいました。正解ではあるものの、「筋が悪い」解き方では太刀打ちできないこともたくさんあるので、考えものです。

■ 演習 5-2 について

$t_1 \{a^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} + t_2 \{b^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} + t_3 \{c^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = 0_{\text{Seq}(\mathbb{R})}$ を満たす $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ が $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ のみとなるための条件を求めます。この等式の初項から第 3 項までを比較して、3 つの等式

$$(*) \quad t_1 + t_2 + t_3 = 0, \quad t_1 a + 2t_2 b + t_3 c = 0, \quad t_1 a^2 + t_2 b^2 + t_3 c^2 = 0$$

が得られます。連立一次方程式 (*) が自明な実数解しか持たなければ、“ v_1, v_2, v_3 ”は $\mathbb{R}$ 上一次独立となります。(*) が自明な実数解のみであるための必要十分条件は、係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ が 0 でないことです。 $|A|$ は、① $\times (-a) +$ ②, ① $\times (-a^2) +$ ③

を行なってから第 1 列に関して余因子展開することで、自然に因数分解されて、 $|A| = (b - a)(c - a)(c - b)$ となることがわかります。したがって、連立一次方程式 (*) が自明な実数解しか持たないための必要十分条件は、 a, b, c が互いに異なることです。この時点で、「 a, b, c が互いに異なれば、“ v_1, v_2, v_3 ”は $\mathbb{R}$ 上一次独立である」が示されたことになります。

逆に、 a, b, c の中に同じものが含まれていれば一次従属になることが簡単にわかります。例えば、 $a = b$ であったとすると、 $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0_{\text{Seq}(\mathbb{R})}$ が成り立つので “ v_1, v_2, v_3 ” は一次従属です。こうして、“ v_1, v_2, v_3 ” が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるための必要十分条件は、 a, b, c が互いに異なることである、とわかります。

なお、 $a \neq b \neq c$ という答案がたくさんありました。この書き方では $a = c$ が許されてしまうので、 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ のように書かなければなりません。

■ 次回予告

今回は、部分空間の概念を復習し、その例として線形常微分方程式方程式の解空間を取り上げて、その基底と次元を調べます。最後に、部分空間の包含関係と次元との関係を学びます。

線形代数4・第6回(2025年10月27日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。