No.6 2026 年 5 月 14 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

6-1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ であることを利用して、次の各極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2}\right)^n$

6-2. 次の各関数を微分せよ (計算過程がわかるように書くこと)。

(1) $f(x) = (x^2-2x+1)e^{-\frac{x}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$ (2) $g(x) = e^{x^2}\cos^4(x^3) \quad (x \in \mathbb{R})$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.6]

2026 年 5 月 14 日発行

■ 第５回学習内容チェックシートについて

- Q1 の 2 番目の問いの解答では、極限 $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき、というもの多かったですが、これでは不十分です。関数が微分可能というのは、定義域内のすべての点で微分可能という意味ですから、すべての点 $a \in I$ で $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するときをいう、のように答えてください。
- Q3 も不十分な解答が多かったです。単に「合成関数で表わして微分する」と答えるのではなく、具体的な手続きを書きましょう。例えば、$f(x)$ を関数 $f_1(x) = x^2 + 3x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ と $f_2(y) = y^n$ $(y \in \mathbb{R})$ の合成関数として $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ のように表わし、合成関数の微分公式 $(f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$ を用いる、のように書くとよいでしょう。

■ 演習 5-1 について

全体的によくできていました。微分係数の定義に従い、$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$ を計算していきます。値は $-\frac{1}{4}$ になるわけですが、極限の計算過程において、$x - 2$ を約分する箇所と $x = 2$ を代入する箇所を飛ばさずに書くようにしてください。なお、解答には、$\lim_{x \to 2} -\frac{1}{2x}$ という記述が多々ありました。これは、正式には $\lim_{x \to 2} \left(-\frac{1}{2x} \right)$ と書くべきです。

■ 演習 5-2 について

(1) において $\cos^4(x^5)$ の微分ができていない答案が多数ありました。$\cos^4(x^5)$ は 2 つの関数 $f_1(x) = x^5$ $(x \in \mathbb{R})$ と $f_2(y) = \cos^4(y)$ $(y \in \mathbb{R})$ の合成関数 $(f_2 \circ f_1)(x)$ で表わすことができます。したがって、その微分は、合成関数の微分法を用いて次のように計算することができます。

$$\left(\cos^4(x^5)\right)' = f_2'(x^5) \cdot f_1'(x) = 5x^4 \cdot f_2'(x^5) \qquad \cdots\cdots (*)$$

ここで、$f_2(y) = (\cos y)^4$ なので、もう一度合成関数の微分法を用いて $f_2'(y) = 4(\cos y)^3 \cdot (\cos y)' = -4(\cos^3 y)(\sin y)$ がわかります。この式の y に x^5 を代入したものを $(*)$ に代入して、$\left(\cos^4(x^5)\right)' = -20x^4 \cos^3(x^5) \sin(x^5)$ が得られます。

上記の計算と $\left(\sin(x^2)\right)' = 2x \cos(x^2)$ およびライプニッツの公式を適用し、(1) の最終的な答え $f'(x) = 2x \cos(x^2) \cos^4(x^5) - 20x^4 \sin(x^2) \cos^3(x^5) \sin(x^5)$ が導かれます。

(2) はもちろん商の微分公式を用いて計算します。すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x^2 - 2)'(x^3 - 2x + 1)^5 - (3x^2 - 2)\left((x^3 - 2x + 1)^5\right)'}{\left((x^3 - 2x + 1)^5\right)^2} \\ &= \cdots = \frac{6x(x^3 - 2x + 1) - 5(3x^2 - 2)^2}{(x^3 - 2x + 1)^6} = \frac{-39x^4 + 48x^2 + 6x - 20}{(x^3 - 2x + 1)^6} \end{aligned}$$

となります。分子を $6x(x^3 - 2x + 1) - 5(3x^2 - 2)^2$ のままにした答案が少なからずありましたが、計算は易しいので、展開して整理すべきでしょう。

■ 次回予告

次回は平均値の定理とその意味、およびその応用 — 関数の極値を微分を使って求める方法や関数の極限を微分を用いて求める方法 (ロピタルの定理) — を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 6 回 (2026 年 5 月 14 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。