

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

6-1. 次の各関数は全微分可能かどうかを調べよ (答えのみは不可)。

(1) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

(2) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

ヒント：(2) については、全微分可能ならば連続でなければならないことを利用する。例えば、放物線 $x = y^2$ に沿って $(0, 0)$ に近づけた場合の極限と $g(0, 0)$ とを比較する。

6-2. 関数 $f(x, y) = x^2 \text{Sin}^{-1}(y)$ ($x \in \mathbb{R}$, $-1 < y < 1$) に対して、方程式 $z = f(x, y)$ が定める曲面の点 $(2, \frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$ における接平面の方程式を求めよ。但し、 Sin^{-1} は関数 $g(x) = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) の逆関数を表わす。 Sin^{-1} の導関数が $(\text{Sin}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) により与えられることは使ってよい。

2025 年 10 月 29 日発行

■ 第5回の学習内容チェックシートについて

- Q3 は 2 変数関数の極大値とは何かを答えて、その状況をグラフで表現する問題でした。極大値の意味を答える欄では、「 $U_\varepsilon(a, b)$ に含まれる、 (a, b) 以外の任意の点 (x, y) に対して $f(x, y) < f(a, b)$ となるときの $f(a, b)$ のこと」のように ε について説明がないものがありました。「 $\varepsilon > 0$ を十分小さくとったとき」という文言が必要です。

グラフの様子を描く欄については、1 変数関数のグラフが描かれているものが多かったです。ここで扱っているのは 2 変数関数ですから、極大値の付近のグラフの様子は 3 次元空間内の曲面として描いてください。

- Q4 は、偏微分可能な関数 $f(x, y)$ の極値を与える点の候補を求めるための、解決方法・方針を書く問題でした。「 $f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるとすると....」と書き始めて、証明を書き込んでいるシートその他、「 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となる (a, b) を求める」という解答もありました。極値を与える点の候補の (a, b) が先にありきの書き方ではなく、それを探すという視点で書いてください。まずは、偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求め、次に、 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解く、というように書きましょう。

■ 演習 5-1 について

答えのみを記すと、(1) は $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$

(2) は $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{(y + \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}}, \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 - 1}}$ になります。よくできていましたが、導出過程の記述が不十分なものや、整理していないものがありました。また、偏微分を表

わすのに ' を用いている答案がありました。 x で偏微分するのか、 y で偏微分するのかがわからないので、この書き方はよくありません。

■ 演習 5-2 について

チェックシートの Q4 に書いてもらったように、まず、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算します。結果は $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2), \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\left(-xe^{-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}e}\right)$ となります。次に、 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解きます。 $e^{-x^2-y^2} > 0$ より、 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ から $1-2x^2 = 0$ が導かれ、これを解いて $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ が得られます。ここまでは正解の人が多かったです。問題は $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ の方です。この等式から「(i) $y = 0$ 」または「(ii) $-xe^{-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}e} = 0$ 」が導かれますが、このような「項目化」や「番号付け」を行なって解答した人がとても少なかったです。場合分けの議論では、このような整理を行なって書くことで、混乱を減らすことができます。(i) から極値を与える点の候補 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ が求まり、(ii) から極値を与える点の候補 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ が求まります。そして最後に、場合分けを行なって求めた点を並べて、最終的な結論を文章で記すことも大事です。

■ 次回予告

次回は、合成関数の偏微分規則(連鎖定理)について学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎2) ・ 第6回 (2025 年 10 月 29 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。