No.6 2026 年 10 月 29 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

6-1. 次の各関数は全微分可能かどうかを調べよ。その際、関数 $p(x,y)=x,\ q(x,y)=y$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ および定値関数が全微分可能であることと、次節で示される結果「全微分可能な関数と微分可能な 1 変数関数の合成が全微分可能である」は証明せずに用いてよい。

(1) $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{y^2+1}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

(2) $g(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 1 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

6-2. 関数 $f(x,y)=\mathrm{Sin}^{-1}(x^2y)$ $(-1<x^2y<1)$ に対して、方程式 $z=f(x,y)$ が定める曲面の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{3},f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{3}\right)\right)$ における接平面の方程式を求めよ。

但し、Sin^{-1} は関数 $g(x)=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表わす。Sin^{-1} の導関数が $(\mathrm{Sin}^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ により与えられることは使ってよい。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.6]

2026 年 10 月 29 日発行

■ 第５回の学習内容チェックシートについて

- Q3 は 2 変数関数の極大値とは何かを答えて、その状況をグラフで表現する問題でした。極大値の意味を答える欄では、「$U_\varepsilon(a,b)$ に含まれる、(a,b) 以外の任意の点 (x,y) に対して $f(x,y) < f(a,b)$ となるときの $f(a,b)$ のこと」のように ε について説明がないものがありました。「$\varepsilon > 0$ を十分小さくとったとき」という文言が必要です。

  グラフの様子を描く欄については、1 変数関数のグラフが描かれているものが非常に多かったです。ここで扱っているのは 2 変数関数ですから、極大値の付近のグラフの様子は 3 次元空間内の曲面として描いてください。
- Q4 は、偏微分可能な関数 $f(x,y)$ の極値を与える点の候補を求めるための、解決方法・方針を書く問題でした。「$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとすると....」と書き始めて、証明を書き込んでいるシートの他、「$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ となる (a,b) を求める」という解答もありました。極値を与える点の候補の (a,b) が先にありきの書き方ではなく、それを探すという視点で書いてください。まずは、偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算し、次に、$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解く、というように書きましょう。

■ 演習 5-1 について

答えのみを記すと、(1) は $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^2 e^{\cos(xy^2)} \sin(xy^2),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{\cos(xy^2)} \sin(xy^2)$, (2) は $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\dfrac{y}{x}\Big) - y,\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -2y\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\dfrac{x}{y}\Big) + x$ になります。よくできていましたが、偏微分を表わすのに $'$ を用いている答案が多数ありました。x で偏微分するのか、y で偏微分するのかがわかないので、この書き方はよくありません。

■ 演習 5-2 について

チェックシートの Q4 でも出題されているように、まず、$\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算します。結果は $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 16x^3 + 6xy^2 + y^3 - 8,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 3xy^2$ となります。次に、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解きます。$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy(2x+y)$ のように因数分解されるので、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ から、「(i) $x = 0$」または「(ii) $y = 0$」または「(iii) $2x + y = 0$」が導かれます。あとは、各場合に $16x^3 + 6xy^2 + y^3 - 8 = 0$ に代入して極値を与える点の候補として、$(0,2),\ \Big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\Big),\ \Big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\sqrt[3]{2}\Big)$ が求められます。

この問題の出来はよかったのですが、上記のように、「項目化」や「番号付け」を行なって解答した人は少なかったです。場合分けの議論では、このような整理を行なうことで、混乱を減らすことができるので、ぜひ実行してください。そして最後に、場合分けを行なって求めた点を並べて、最終的な結論を文章で記すことも大事です。

■ 次回予告

次回は、合成関数の偏微分規則 (連鎖定理) について学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 6 回 (2026 年 10 月 29 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。