2024 年 5 月 21 日

基礎数学演義 3 第 7 回・問題解答&要約シート (1)

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ________________________

Q7-1. $\frac{X+4}{2X^2-5X-3}$ のように、2 つの多項式の商 $\frac{p}{q}$ (但し、$q \neq 0$) の形に書かれる式を**有理式**と呼ぶ。2 つの有理式 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ が等しいとは、多項式として $p_1q_2 = p_2q_1$ が成り立つときをいう。整数から有理数を構成したのと同じように、$\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$ 上に同値関係 $\sim$ を導入し、有理式をその同値類として正当化することができ、有理式同士の和と積を定めることができる。

$\mathbb{Q}$-係数の有理式として

$$\frac{X^2+X-1}{(X^2+X+1)(X-2)} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-2}$$

が成り立つように有理数 a, b, c を定めよ。

Q7-2. 任意の $\mathbb{K}$-係数多項式

$$f = \sum_{i=0}^{l} a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i, \quad h = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \qquad (a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K})$$

に対して

$$(f \boldsymbol{+} g) \boldsymbol{+} h = f \boldsymbol{+} (g \boldsymbol{+} h)$$

が成り立つことを示せ。

2024 年 5 月 21 日

基礎数学演義 3　第 7 回・問題解答&要約シート (2)

学 籍 番 号 ________________　氏 名 ___________________________

Q7-3. $\mathbb{K}$-係数多項式

$$f = \sum_{i=0}^{l} a_i X^i, \quad g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j, \quad h = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \qquad (a_i, b_j, c_k \in \mathbb{K})$$

について、$i > l,\ j > m,\ k > n$ を満たす整数 i, j, k に対して $a_i = b_j = c_k = 0$ と約束する。

(1) $fg = \sum_{p=0}^{l+m} u_p X^p,\ (fg)h = \sum_{q=0}^{l+m+n} v_q X^q$ とおく。各 p $(0 \leq p \leq l+m)$ および各 q $(0 \leq q \leq l+m+n)$ に対して u_p, v_q を $\Sigma,\ a_i, b_j, c_k$ を用いて表わせ。

(2) $gh = \sum_{r=0}^{m+n} w_r X^r,\ f(gh) = \sum_{q=0}^{l+m+n} z_q X^q$ とおく。各 r $(0 \leq r \leq m+n)$ および各 q $(0 \leq q \leq l+m+n)$ に対して w_r, z_q を $\Sigma,\ a_i, b_j, c_k$ を用いて表わせ。

(3) $(fg)h = f(gh)$ が成り立つことを示せ。

Q7-4. $\mathbb{K}$-係数多項式 $f = \sum_{j=0}^{n} (1+X)^j$ に対し、X^i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ の係数を求めよ (係数は二項係数の和の形のままで構わない)。次に、f における X^2 の係数を n の式で表わせ (つまり、先に求めた二項係数の和を計算せよ)。

[X^i の係数]

[X^2 の係数]