

基礎数学演義3 第7回・問題解答&要約シート(1)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q7-1. $\frac{X+4}{2X^2-5X-3}$ のように、2つの多項式の商 $\frac{p}{q}$ (但し、 $q \neq 0$) の形に書かれる式を**有理式**と呼ぶ。2つの有理式 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ が等しいとは、多項式として $p_1q_2 = p_2q_1$ が成り立つときをいう。整数から有理数を構成したのと同じように、 $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$ 上に同値関係 \sim を導入し、有理式をその同値類として正当化することができ、有理式同士の和と積を定めることができる。

\mathbb{Q} -係数の有理式として

$$\frac{X^2 + X - 1}{(X^2 + X + 1)(X - 2)} = \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{c}{X - 2}$$

が成り立つように有理数 a, b, c を定めよ。

Q7-2. 任意の \mathbb{K} -係数多項式

$$f = \sum_{i=0}^l a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^m b_i X^i, \quad h = \sum_{i=0}^n c_i X^i \quad (a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K})$$

に対して

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$

が成り立つことを示せ。

基礎数学演義3 第7回・問題解答&要約シート(2)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q7-3. \mathbb{K} -係数多項式

$$f = \sum_{i=0}^l a_i X^i, \quad g = \sum_{j=0}^m b_j X^j, \quad h = \sum_{k=0}^n c_k X^k \quad (a_i, b_j, c_k \in \mathbb{K})$$

について、 $i > l, j > m, k > n$ を満たす整数 i, j, k に対して $a_i = b_j = c_k = 0$ と約束する。

(1) $fg = \sum_{p=0}^{l+m} u_p X^p, (fg)h = \sum_{q=0}^{l+m+n} v_q X^q$ とおく。各 p および各 q に対して u_p, v_q を Σ, a_i, b_j, c_k を用いて表わせ。

(2) $gh = \sum_{r=0}^{m+n} w_r X^r, f(gh) = \sum_{q=0}^{l+m+n} z_q X^q$ とおく。各 r および各 q に対して w_r, z_q を Σ, a_i, b_j, c_k を用いて表わせ。

(3) $(fg)h = f(gh)$ が成り立つことを示せ。

Q7-4. \mathbb{K} -係数多項式 $f = \sum_{j=0}^n (1+X)^j$ に対し、 X^i ($i = 0, 1, \dots, n$) の係数を求めよ (係数は二項係数の和の形のままで構わない)。次に、 f における X^2 の係数を n の式で表わせ (つまり、先に求めた二項係数の和を計算せよ)。

$[X^i$ の係数]

$[X^2$ の係数]