

線形代数 1 演習問題

7-1. (正則性と逆行列)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

は正則かどうかを調べよ。さらに、正則なときには、その逆行列も求めよ。

7-2. (行基本変形と行列の積)

4次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

と4次正方行列 P と Q を考える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 積 PA と QA を求めよ。

(2) PA および QA は、それぞれ、 A からどのような行基本変形を続けて行って得られるか？

■ 演習問題 6-1 について

計算ミスが多かったことと途中式のない答案が多かったため、正答率は低かったです。

事前練習問題通りに、まず与えられた行列を A とおき、 $|A|$ を計算します。その結果、 $|A| \neq 0$ であれば A は逆行列 A^{-1} を持つことがわかり、公式を用いて A^{-1} を求めることができます。

(1) の答えは、 $|A| = \frac{2}{15} \neq 0$ より正則で、 $A^{-1} = \frac{15}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ となります。

(2) の答えは、 $|A| = -161 \neq 0$ より正則で、 $A^{-1} = -\frac{1}{161} \begin{pmatrix} -10 & 36 & -33 \\ 36 & -33 & -10 \\ -33 & -10 & 36 \end{pmatrix}$ となります。

波線で強調されている「 $\neq 0$ 」の部分が逆行列を持つ根拠になるので、重要です。強く意識して書くようにしてください。

■ 演習問題 6-2 について

この問題も計算間違いが多く、途中式のない答案が目立ちました。

(1) の答えは、 $|A| = 34 \neq 0$ より A は正則で、 $A^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -18 & 14 & -6 \\ 20 & -8 & 1 \\ 28 & -18 & -2 \end{pmatrix}$ となります。

$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{34}$ 倍することを忘れがちなので注意しましょう。

(2) の答えは、 $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を計算して、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{34} \\ -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$ となります。

■ 第6回の学習内容チェックシートについて

今回はよくできていましたが、Q1 や Q2 の最初の枠に書くべき等式を $AX = E_n$ としているシートが数枚ありました。定義の仕方によっては、 $AX = E_n$ も正解になりますが、この授業では $XA = E_n$ を満たす条件も (定義の段階では) 課しているので、 $AX = E_n$ の代わりに $AX = XA = E_n$ と書いてください。

■ 要再提出の学習内容チェックシートの修正方法について

第1回の授業時に配布した「授業の進め方」、および、線形代数1通信 [No.1] に書かれている通り、学習内容チェックシートの修正は、自分の誤答を消しゴムで綺麗に消して、再び黒の鉛筆・シャープペンで正解を記入しなければなりません。ルールが守られていない場合には、「確認」の印はもらえません。

■ 次回予告

第6節において、2次と3次の正方行列 A に対して定義された数 $|A|$ は A の行列式と呼ばれます。今回はその性質を調べます。さらに、2次と3次の行列式の間関係式を導き、一般の n 次正方行列 A に対して $|A|$ をどのように定義すればよいかを説明します。

線形代数1・第7回(2024年5月23日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。