No.7 2024 年 11 月 7 日

線形代数 2 演習問題

7-1. (線形性の幾何学的意味)

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$ を考える。

(1) 3 点 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の T_A による像を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\Delta = \{\ \mathbf{a} + s(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{q} - \mathbf{a}) \mid s, t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \}$$

の T_A による像 $T_A(\Delta)$ を求め、それを (x, y)-座標平面上に図示せよ。

7-2. (数ベクトル空間の間の線形写像)

写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x - 4y \\ 5x - 6y \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

により定める。

(1) F は線形写像であることを示せ。

(2) $F = T_A$ となる行列 A を求めよ。

■ 第６回学習内容チェックシートについて

∘ Q1のベクトルの組は(1), (2)のいずれも一次従属です。この結果自体はほとんどの人ができており、(2)については理由も正しく書けているものが多かったです。

(1)の理由は不十分な解答が目立ちました。3つのベクトルの組“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$”が一次従属となる理由を書かなければならないので、$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ を満たす同時には0でない実数 t_1, t_2, t_3 を具体的に1組与える必要があります。

∘ Q3の5つ目の枠と7つ目の枠には、零ベクトルだけならなる部分空間 $\{\mathbf{0}\}$ が入ります。中括弧 $\{\ \}$ がないものやベクトルが太字になっていないものなどが多かったです。

■ 演習 6-1 について

計算のプロセスが書かれていない答案が多かったです。

(2)は、各 $\mathbf{w}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を“$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$”の一次結合で表わすことがポイントです。等式
$\begin{cases} \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_1 \\ 3\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 \end{cases}$ を $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ に関して解くプロセスは、連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = b_1 \\ 3x_1 + 2x_3 = b_2 \\ -x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$ を解くプロセスと同じですから、拡大係数行列を行基本変形して求めることができます。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{u}_2 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(-3)+②} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & 2 & 6 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \\ 0 & 2 & 6 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times2+③} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \\ 0 & 0 & 10 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3 \end{array}\right)$$

となるので、これを連立一次方程式の形に戻して後退代入で解いて、次の表示を得ることができます：

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{5}(2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3), \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{5}(-3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3), \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{10}(-3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3).$$

正確な値を求めるために、行列の行基本変形を利用するなど、見通しよく解いてください。

■ 演習 6-2 について

$|A|$ において $\boxed{4} \times (-a) + \boxed{2}$ と $\boxed{4} \times (-2) + \boxed{3}$ を行い、第1行に関して余因子展開を行ってから、③ $\times (-a) +$ ① と ③ $\times (-2) +$ ② を行ってみましょう。すると、

$$|A| = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -a & -5a & -9 \\ -2 & -a^2 - 1 & -2a \\ -1 & -5 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5a & 9 \\ 2 & a^2 + 1 & 2a \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 - a^2 \\ 0 & a^2 - 9 & 0 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix}$$

のようになります。これは $-(9 - a^2) \cdot (a^2 - 9) \cdot 1 = (a - 3)^2(a + 3)^2$ のように因数分解できるため $a \neq \pm 3$ のときには $\operatorname{rank} A = 4$ とわかります。$a = \pm 3$ については、個別に $\operatorname{rank} A$ を計算し、いずれも2になることがわかります。これより、W の次元が次のように求められます。

$$\dim W = 4 - \operatorname{rank} A = \begin{cases} 0 & (a \neq \pm 3 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = \pm 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

■ 次回予告

次回は、写像に関する基礎（単射、全射、全単射、合成、逆写像）を概観したのち、行列の積と線形写像の合成、正則行列と全単射、逆行列と逆写像との関連を学びます。

線形代数２・第７回 (2024 年 11 月 7 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。