No.7 2026 年 11 月 5 日

線形代数２演習問題

7-1. (線形性の幾何学的意味)

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ から定まる写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$ を考える。2 点 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ に対して、$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\Delta = \{\ s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s, t \geq 0,\ s + t \leq 1\ \}$ の T_A による像 $T_A(\Delta)$ を求め、それを (x, y)-座標平面上に図示せよ。

7-2. (数ベクトル空間の間の線形写像)

写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + 4y \\ 9x - 8y \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

により定める。

(1) F は線形写像であることを示せ。

(2) $F = T_A$ となる行列 A を求めよ。

線形代数２通信 [No.7] 2026 年 11 月 5 日発行

■ 第６回学習内容チェックシートについて

- Q1 のベクトルの組は (1), (2) のいずれも一次従属です。この結果自体はほとんどの人ができており、(2) については理由も正しく書けているものが多かったです。

  (1) の理由は不十分な解答がありました。3 つのベクトルの組 “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” が一次従属となる理由を書かなければならないので、$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ を満たす同時には 0 でない実数 t_1, t_2, t_3 を具体的に１組与える必要があります。
- Q3 の 5 つ目の枠と 7 つ目の枠には、零ベクトルだけならなる部分空間 $\{\mathbf{0}\}$ が入ります。中括弧 { } がないものがありました。

■ 演習 6-1 について

計算のプロセスが書かれていない答案が多かったです。

(2) は、各 $\mathbf{w}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を “$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$”の一次結合で表わすことがポイントです。等式

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_1 \\ 3\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 \end{cases} \quad \text{を } \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \text{ に関して解くプロセスは、連立一次方程式} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = b_1 \\ 3x_1 + 2x_3 = b_2 \\ -x_2 + 2x_3 = b_3 \end{cases}$$

を解くプロセスと同じですから、拡大係数行列を行基本変形して求めることができます。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{u}_2 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(-3)+②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & 2 & 6 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \\ 0 & 2 & 6 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times2+③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \mathbf{u}_1 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{u}_3 \\ 0 & 0 & 10 & \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3 \end{array}\right) \text{ となるので、これを連立一次方程式の形に戻して後退代入で解いて、次の表示を得ることができます：}$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{5}(2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3), \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{5}(-3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3), \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{10}(-3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3).$$

正確な値を求めるために、行列の行基本変形を利用するなど、見通しよく解いてください。

■ 演習 6-2 について

$|A|$ において ④ $\times(-a) +$ ② と ④ $\times(-2) +$ ③ を行い、第 1 行に関して余因子展開を行ってから、③ $\times(-a) +$ ① と ③ $\times(-2) +$ ② を行ってみましょう。すると、

$$|A| = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -a & -5a & -9 \\ -2 & -a^2-1 & -2a \\ -1 & -5 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5a & 9 \\ 2 & a^2+1 & 2a \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9-a^2 \\ 0 & a^2-9 & 0 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix}$$

のようになります。これは $-(9-a^2)\cdot(a^2-9)\cdot 1 = (a-3)^2(a+3)^2$ のように因数分解できるため $a \neq \pm 3$ のときには $\operatorname{rank} A = 4$ とわかります。$a = \pm 3$ については、個別に $\operatorname{rank} A$ を計算し、いずれも 2 になることがわかります。これより、W の次元が次のように求められます。

$$\dim W = 4 - \operatorname{rank} A = \begin{cases} 0 & (a \neq \pm 3 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = \pm 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

■ 次回予告

次回は、写像に関する基礎（単射、全射、全単射、合成、逆写像）を概観したのち、行列の積と線形写像の合成、正則行列と全単射、逆行列と逆写像との関連を学びます。

線形代数２・第７回 (2026 年 11 月 5 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。