

線形代数 3 演習問題

7-1. $\mathbb{C}$ -線形写像 $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + iy \\ -ix + y - iz \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3\right)$$

により定義する。

- (1) $\mathbb{C}^3$ の標準基底と $\mathbb{C}^2$ の標準基底に関する T の行列表示を求めよ。
- (2) $\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2$ をそれぞれ通常のエルミート内積を備えた計量空間とみるとき、 T の随伴写像 T^* を求めよ。

7-2. (1) ユニタリ行列の行列式は大きさ 1 の複素数であることを示せ。

(2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ をユニタリ行列とすると、

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A & iA \\ iA & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

もまたユニタリ行列であることを示せ。但し、 i は虚数単位とする。

■ 演習 6-1 について

前回の授業で、かなり気をつけるように注意したのですが、未だに $2/3$ 以上の人が、内積の計算において複素共役を取り忘れてしています。

事前練習用演習問題と同様にして、 U がユニタリ行列であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1 \\ (1-i)a + (1-i)b + ic = 0 \\ (1-i)a + ib + (1-i)c = 0 \end{cases}$$

が成り立つことであることがわかります。あとはこの連立一次方程式を解くだけです。答えの表示は複数あります。 $a = z$ ($z \in \mathbb{C}$) とおいて連立方程式を解いたときには、 $a = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\theta}$, $b = c = \frac{i-1}{\sqrt{5}}e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) になります。 $b = z$ ($z \in \mathbb{C}$) とおいて解いたときには、 $a = -\frac{i+1}{\sqrt{10}}e^{i\theta}$, $b = c = \frac{2}{\sqrt{10}}e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) になります。

■ 演習 6-2 について

この問題は事前練習用演習問題と同じようにして解くことができ、単純な問題でしたが、できていない人が多かったです。 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{p} \rangle = 0$ を用いると、

$$T(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = 0\mathbf{p} + \mathbf{a} + 0\mathbf{b},$$

$$T(\mathbf{b}) = \mathbf{b} = 0\mathbf{p} + 0\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$T(\mathbf{p}) = -\mathbf{p} = (-1)\mathbf{p} + 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$$

となることから、 $\mathbb{R}^3$ の基底 “ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ ” に関する行列表示は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ になります。

■ 第 6 回学習内容チェックシートについて

○ Q1(3) については、少数でしたが定義域と終域を明記していないものがありました。写像は① 定義域と呼ばれる集合 A , ② 終域と呼ばれる集合 B , ③ 定義域 A 中の各元に対して終域 B の元を 1 つずつ定める対応規則、の 3 つを指定することによって定まります。写像を定義するときには、この 3 つを明記しなければなりません。例えば、自然数の集合 $\mathbb{N}$ から有理数の集合 $\mathbb{Q}$ への写像であって、各自然数にその逆数に対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わします：

写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ を $f(n) = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) によって定義する。

この表現形式に倣って、 T_A の定義を書いてください。但し、 T_A の場合、すでに定義は与えられているので、受動態で表現した方がよいでしょう。

○ 今年度は Q3(1) の解答において「そのような基底」という表現を使ったものが目立ちました。アブストラクトから単に該当部分を抜き出したため、意味不明な文章になっています。「そのような」の中身を一行上から読み取って書き換えてください。

■ 次回予告

複素正方行列 A がユニタリ行列で対角化されるならば、 $A^*A = AA^*$ が満たされることはすぐにわかります。実は、逆も成立します。次回は、この事実を証明します。

線形代数 3・第 7 回 (2025 年 5 月 26 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。