

線形代数 4 演習問題

7-1. n 次複素正方行列 A に対して A^* を随伴行列とする： $A^* = \overline{A}^T$. エルミート行列全体を

$$W = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A \}$$

とおく。

- (1) $M_n(\mathbb{C})$ を通常の方法で $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなすとき、 W は $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間でないことを示せ。
- (2) $M_n(\mathbb{C})$ を、行列のスカラー倍を $\mathbb{R}$ に制限することにより、 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすと、 W は $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間になることを示せ。
- (3) $n = 2$ とする。 W を (2) のように $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすとき、 W の基底を一組見つけて、 $\dim_{\mathbb{R}} W$ を求めよ。

■ 第 6 回学習内容チェックシートについて

- Q2(1) は基底であるための条件を 2 つ挙げて終わりという解答が多かったです。基底とはそれらの条件を満たす何のことを言いますか。そのことを書きましょう。
- Q2(3) は「 V の次元が既知の場合」という解答が非常に多かったです。次元が既知でも、 V の次元と同じ個数のベクトルからなる列でなければ片方だけで OK とはなりません。
- Q4(2) は、与えられた一次独立なベクトルの列 “ $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ ” を含む $V = \mathbb{K}^n$ の基底を見つける方を記す問題でした。[例 6-4-2] と同様に、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ に $V = \mathbb{K}^n$ の標準基底 “ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ” を付け加えて行列 $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)$ を作り、行基本変形を施して階段行列にします。この階段行列において、最初の k 列を含むように、「段」が下がる列を抜き出して、一次独立をなす n 個の列ベクトルを選びます。行基本変形の下では一次独立となる列番号の組は変わらないので、抜き出した列番号に対応する列ベクトルを A から選べば、その組は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ を含む V の基底を与えます。

■ 演習 6-1 について

(1) 行列 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ にガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を施して階段型にします。「段数」を数えて $\text{rank } A = 3$ とわかり、“ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ” の一次独立性が導かれます。

(2) (1) で行なった行基本変形を $(4, 7)$ -行列 $B = (A \mid E_4)$ に行います (E_4 は 4 次単位行列です)。すると、最初の 3 列の部分は階段型になります。さらに行基本変形を続けていくと階段行列

列 $\begin{pmatrix} \boxed{3} & & & & \\ & \boxed{-4} & & & * \\ & & \boxed{5} & 0 & \\ & 0 & & \boxed{-\frac{12}{5}} & 2 \ 1 \end{pmatrix}$ が得られます。この行列の最初の 3 列と第 5 列からなるベクトルの組

は一次独立なので、行基本変形の下では一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないことから、 B においても同じ列番号からなるベクトルの組 “ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2$ ” は一次独立です。 $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ より、この組は要求された条件を満たす基底になっています。

■ 演習 6-2 について

基底であるための 2 条件を確認めます。まず $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを確かめるために、 $t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 + t_4 u_4 = 0_V$ ($t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$) とおきます。この等式に、問題文で与えられている等式を代入し、両辺を $\sqrt{2}$ 倍すると、 $((t_1 + t_2) + (t_1 - t_2)i)v_1 + ((t_3 + t_4) + (t_3 - t_4)i)v_2 = 0_V$ が得られます。“ v_1, v_2 ” が $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを使って v_1, v_2 の係数が 0 とわかり、さらに、 $t_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) と複素数の 0 の定義から、 $t_1 + t_2 = t_1 - t_2 = t_3 + t_4 = t_3 - t_4 = 0$ が得られます。この解は $t_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) なので、“ u_1, u_2, u_3, u_4 ” は $\mathbb{R}$ 上一次独立です。

次に、「張る」ことを確認めます。 $V = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2\}$ より、任意の $v \in V$ は $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) のように表わされます。 $\alpha = t_1 + it_2$, $\beta = t_3 + it_4$ ($t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, 4$) とおくと、 $v = t_1 v_1 + t_2 (iv_1) + t_3 v_2 + t_4 (iv_2)$ となります。ここで、問題文の等式から、 $v_1 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}$, $iv_1 = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{u_3 + u_4}{\sqrt{2}}$, $iv_2 = \frac{u_3 - u_4}{\sqrt{2}}$ が得られます。これらを先程の v の式に代入して v は $v = \frac{t_1 + t_2}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}} u_2 + \frac{t_3 + t_4}{\sqrt{2}} u_3 + \frac{t_3 - t_4}{\sqrt{2}} u_4$ のように表わされることがわかります。この表示の u_j ($j = 1, 2, 3, 4$) の係数は実数なので、 $V = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ とわかります。

■ 次回予告

今回は、線形写像の定義と性質、および、その行列表示について復習します。

線形代数4・第7回(2025年11月10日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。