

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

7-1. $f(x, y)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) を微分可能な関数とし、 u, v を変数とする $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\tilde{f}(u, v)$ を

$$\tilde{f}(u, v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$$

考える。 $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -\sqrt{3}) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ であるとき、 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(\log 2, -\frac{\pi}{3})$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(\log 2, -\frac{\pi}{3})$ の値を求めよ。

7-2. $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分可能な関数とし、 $\theta \in \mathbb{R}$ を定数とする。 $f(x, y)$ は、

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

とおくことによって、 u, v を変数とする $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数とみなされる。つまり、

$$\tilde{f}(u, v) = f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta)$$

によって定義される u, v を変数とする関数 $\tilde{f}(u, v)$ を考える。このとき、

(1) 偏導関数 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を $u, v, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ。

(2) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ を $u, v, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を用いて表わせ。

2025 年 11 月 5 日発行

■ 第6回の学習内容チェックシートについて

○ Q2 は、多項式の商の形で与えられる関数 $f(x, y)$ が全微分可能であることを示には? というものでした。分母と分子の多項式関数 $g(x, y) = x^2 + y^2$, $h(x, y) = xy$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) が全微分可能であることを示すという解答や、偏導関数が連続であることを示すといった解答が多かったです。全微分可能であることを示す際には、まずはその関数が全微分可能な関数の「組合せ」で書き表わされるかどうかを検討します。特に、多項式の商の形をした関数については、次の3つの事実を用いて示すことができます。

- 関数 $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) は全微分可能である [例 6-1-3].
 - $c \in \mathbb{R}$ への定数関数 $c(x, y) = c$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) は全微分可能である [全微分可能の定義].
 - 全微分可能な関数の和・差・積・商は全微分可能である [補題 6-2-1].
- Q3 の第3項目は、関数が定める曲面の接平面に関する問題でした。2つの枠内に、それぞれ、接線と接線の方程式 (6-4a) を書き入れた誤答が多かったです。理解に苦しむのは、片方だけこのような間違いをしているものが多いことです。2つの枠内には、順に、接平面と (6-4b) の方程式を書き入れてください。

■ 演習 6-1 について

(1) については、どこかで学んでいるのかもしれませんが、「偏導関数が存在して連続だから」全微分可能という解答が多かったです。ここで問いたいことは、第6回の学習内容チェックシート Q2 の項目に対する上記の説明に記されているように、簡単な全微分可能な関数の「組合せ」として捉えるという視点での問題解決です。出題の主旨をよく理解して欲しいです。

(2) はヒントのように解くことができます。[定理 6-3-1] の対偶から導かれる、関数 $g(x, y)$ は原点において連続でないため、微分可能ではないというのが結論ですが、原点において連続でないことはどのように示せばよいでしょうか。多くの人が2つの方向から原点に向かって近づけたときの極限の値を比較し、それらが異なるから連続でないと結論づけていました。この理由づけは連続の定義に照らし合わせると、ややピンとがずれています。(0, 0) で連続であるためには、確かに、極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ が存在していなければなりませんが、そのことよりもっと大切なことは、(0, 0) でグラフが繋がっているかどうかということです。つまり、極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ の値が (0, 0) での値 $g(0, 0)$ に一致しているということです。極端な例として、次のように定義される関数 f を考えてみてください。

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ -1 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

この関数の場合、極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在し、値は 0 になります。しかし、連続ではありません。 f の (0, 0) での値は -1 であり、(0, 0) でグラフが繋がっていないからです。

■ 次回予告

今回は、第2次偏導関数、第3次偏導関数、... といった高階の偏導関数を導入して、2変数関数の Taylor 展開、Maclaurin 展開を導きます。Taylor 展開、Maclaurin 展開を用いて、何回でも偏微分可能な2変数関数は x と y に関する多項式によって近似されることを説明します。

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎2)・第7回(2025年11月5日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。