No.7 2026 年 11 月 5 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

7-1. $f(x,y)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ を微分可能な関数とし、u,v を変数とする関数

$$\tilde{f}(u,v)=f\Big(u^2\cos\frac{v}{u},u^2\sin\frac{v}{u}\Big)\qquad(u>0)$$

を考える。$\dfrac{\partial f}{\partial x}(18\sqrt{3},-18)=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(18\sqrt{3},-18)=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ であるとき、$\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(6,-\pi)$ の値を求めよ。

7-2. $(0,0)$ を除くすべての点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ からなる領域を D とし、$f(x,y)$ を D 上で定義された微分可能な関数とする。$f(x,y)$ は、

$$\begin{cases}x=2uv,\\ y=u^2-v^2\end{cases}\qquad((u,v)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v)\neq(0,0))$$

とおくことによって、u,v を変数とする D 上で定義された関数とみなされる。つまり、

$$\tilde{f}(u,v)=f(2uv,u^2-v^2)$$

によって定義される u,v を変数とする関数 $\tilde{f}(u,v)$ を考える。このとき、

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u},\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を $u,v,\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ。

(2) $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)^2$ を $u,v,\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u},\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を用いて表わせ。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.7]

2026 年 11 月 5 日発行

■ 第６回の学習内容チェックシートについて

- Q2 は、多項式の商の形で与えられる関数 $f(x,y)$ が全微分可能であることを示には？というものでした。偏導関数が連続であることを示すといった解答が多数ありましたが、これは論外です。全微分可能であることを示すには、まずはその関数が全微分可能な関数の「組合せ」で書き表わされるかどうかを検討してください。特に、多項式の商の形をした関数は、次の２つの事実を用いて、全微分可能なことを示すことができます。
  - 関数 $p(x,y) = x,\ q(x,y) = y\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ および $c \in \mathbb{R}$ への定数関数 $\underline{c}(x,y) = c\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ は全微分可能である [例 6-1-3].
  - 全微分可能な関数の和・差・積・商は全微分可能である [補題 6-2-1].
- Q3 の第 3 項目は、関数が定める曲面の接平面に関する問題でした。2 つの枠内に、それぞれ、接線と接線の方程式 (6-4a) を書き入れた誤答が比較的多かったです。2 つの枠内には、順に、接平面と (6-4b) の方程式を書き入れてください。

■ 演習 6-1 について

(1) については、「偏導関数が存在して連続だから」全微分可能という解答が多かったです。ここで問いたいことは、第６回学習内容チェックシート Q2 に対する上記の説明に書かれているように、簡単な全微分可能な関数の組合せとして捉えるという視点での問題解決です。

方針は正しくても、$f(x,y)$ の分子 e^{xy} の解釈が正しくない (e を定数関数と理解した) ものがありました。e^{xy} は 2 変数関数 $p(x,y) = x,\ q(x,y) = y\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ の積と指数関数 $e^z\ (z \in \mathbb{R})$ との合成 $e^{p(x,y)q(x,y)}$ と捉えてください。p, q は全微分可能なので積 $(pq)(x,y) = p(x,y)q(x,y)$ も全微分可能であり、指数関数は微分可能なので、それらの合成として e^{xy} は全微分可能です。

(2) では、[定理 6-3-1] の対偶から導かれる、「連続でないならば全微分可能でない」という結果を利用します。(x,y) を $(0,0)$ に近づけたときの関数 $g(x,y)$ の極限は $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$ となり、$(0,0)$ における関数値 $g(0,0) = 1$ とは異なります。したがって、関数 $g(x,y)$ は原点において連続でないため、全微分可能ではないという結論が得られます。

なお、この問題は関数が全微分可能か否かを尋ねている問題です。関数 $g(x,y)$ は確かに原点以外では全微分可能ですが、「全微分可能でない点が一つでもあれば、関数として全微分可能でない」ため、原点以外における全微分可能性を調べる必要はありません。

■ 演習 6-2 について

よくできていました。$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{\sqrt{1-(x^2y)^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^2y)^2}}$ となるので、$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}) = 2\sqrt{6}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}) = 1$ となります。また、$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}) = \mathrm{Sin}^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$ です。これらを公式に代入して、求める接平面の方程式 $2\sqrt{6}x + y - z - 3\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = 0$ が得られます。

■ 次回予告

次回は、第２次偏導関数、第３次偏導関数といった高階の偏導関数を導入して、２変数関数の Taylor 展開、Maclaurin 展開を導きます。これらを用いて、何回でも偏微分可能な２変数関数は x, y に関する多項式によって近似されることを説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 7 回 (2026 年 11 月 5 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。