

## 基礎数学演義3 第8回・問題解答&amp;要約シート(1)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q8-1. (1) 多項式  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ ,  $g \neq 0$  に対して、 $f$  を  $g$  で割ったときの商と剰余はどのように定義されるか。その定義を書け。

(2)  $\mathbb{Q}[X]$  において  $f = 8X^6 + 4X^4 + 2X^2 + 1$  を  $g = 2X^3 - X$  で割ったときの商と剰余を求めよ。

Q8-2. (1)  $\mathbb{Q}[X]$  において  $X - 1$  の約数をすべて求めよ。

(2)  $\mathbb{Q}[X]$  において  $6X^2 - X - 1$  の約数をすべて求めよ。

Q8-3. 「 $a, b \in \mathbb{K}[X]$  が  $ab = 1$  を満たすとき、 $a, b$  は定数多項式である」(演習7-3)ことを用いて、0でない多項式  $f, g \in \mathbb{K}[X]$  が  $f|g$  かつ  $g|f$  を満たすとき  $g$  は  $f$  の定数倍であること、すなわち、

$$f|g, g|f \implies \exists c \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ s.t. } g = cf$$

となることを示せ。

## 基礎数学演義3 第8回・問題解答&amp;要約シート(2)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q8-4.  $\mathbb{Q}[X]$  において

$$f = X^5 + X^4 - X^3 + 5X^2 - 3X + 3, \quad g = X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X - 1$$

の最大公約数  $d$  を一組求めよ。Q8-5.  $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$  を 0 でない多項式とする。

(1)  $\gcd(f, g, h)$  は、集合  $I = \{ af + bg + ch \mid a, b, c \in \mathbb{K}[X] \}$  の中のどのような元として特徴づけられ、 $I$  は  $\gcd(f, g, h)$  を用いてどのように表わされるか。

(2)  $d = \gcd(f, g)$ ,  $I = \{ af + bg + ch \mid a, b, c \in \mathbb{K}[X] \}$ ,  $J = \{ pd + qh \mid p, q \in \mathbb{K}[X] \}$  とおく。

(i)  $f, g, h \in J$  を示せ。

(ii)  $d, h \in I$  を示せ。

(iii)  $I = J$  であることを示せ。

(3) (2)(iii) の等式から、 $\gcd(f, g, h) = \gcd(\gcd(f, g), h)$  がわかる。その理由を書け。