

基礎数学演義 3 第 8 回・問題解答&要約シート (1)

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q8-1. (1) 多項式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$, $g \neq 0$ に対して、 f を g で割ったときの商と剰余はどのように定義されるか。その定義を書け。

(2) $\mathbb{Q}[X]$ において $f = 8X^6 + 4X^4 + 2X^2 + 1$ を $g = 2X^3 - X$ で割ったときの商と剰余を求めよ。

Q8-2. (1) $\mathbb{Q}[X]$ において $X - 1$ の約数をすべて求めよ。

(2) $\mathbb{Q}[X]$ において $6X^2 - X - 1$ の約数をすべて求めよ。

Q8-3. 「 $a, b \in \mathbb{K}[X]$ が $ab = 1$ を満たすとき、 a, b は定数多項式である」(演習 7-3) ことを用いて、0 でない多項式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$ が $f|g$ かつ $g|f$ を満たすとき g は f の定数倍であること、すなわち、

$$f|g, g|f \implies \exists c \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ s.t. } g = cf$$

となることを示せ。

基礎数学演義 3 第 8 回・問題解答&要約シート (2)

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q8-4. $\mathbb{Q}[X]$ において

$$f = X^5 + X^4 - X^3 + 5X^2 - 3X + 3, \quad g = X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X - 1$$

の最大公約数 d を求めよ。Q8-5. $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ を 0 でない多項式とする。

(1) $\gcd(f, g, h)$ は、集合 $I = \{ af + bg + ch \mid a, b, c \in \mathbb{K}[X] \}$ の中のどのような元として特徴づけられ、 I は $\gcd(f, g, h)$ を用いてどのように表わされるか。

(2) $d = \gcd(f, g)$, $I = \{ af + bg + ch \mid a, b, c \in \mathbb{K}[X] \}$, $J = \{ pd + qh \mid p, q \in \mathbb{K}[X] \}$ とおく。

(i) $f, g, h \in J$ を示せ。

(ii) $d, h \in I$ を示せ。

(iii) $I = J$ であることを示せ。

(3) (2)(iii) の等式から、 $\gcd(f, g, h) = \gcd(\gcd(f, g), h)$ がわかる。その理由を書け。