No.8 2024年5月30日

線形代数1演習問題

8-1. (2次および3次の行列式)

次の各行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 34 & 36 \\ 35 & 37 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & 9 & -36 \\ 8 & 27 & -216 \end{vmatrix}$

8-2. (行列式の性質と因数分解)

行列式の計算の仕方を工夫して、次の等式を示せ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(2) $\begin{vmatrix} a+b+c & a & a \\ a & a+2b+c & a+b \\ a+b & a & a+b+c \end{vmatrix} = (3a+2b+c)(b+c)^2$

線形代数１通信 [No.8]

2024 年 5 月 30 日発行

■ 第 7 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の「n 次正方行列が正則かどうかを調べるには？」という問いに対して、正則行列の定義を書いた人がいました。$AX = XA = E_n$ となる正方行列 X が存在するか否かを直接調べるのは困難なので、ここには、[定理 7-2-1] と [例 7-2-2] に書かれているような実用的な方法を記入してください。
- Q2 の 1 番目の枠には、同じサイズの 2 つの正則行列 A, B に対して、積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ が A, B の逆行列を用いてどのように表わされるのかを答えます。答えは [補題 7-1-1](3) にあるように、$B^{-1}A^{-1}$ になります。行列の積は実数の積とは違い、可換ではないため、$A^{-1}B^{-1}$ と書き変えることはできません。逆行列をとると、積の順番が変わることに注意しましょう。

■ 演習 7-1 について

事前練習用演習問題 pre7-1 と同じ方法で解くことができます。(4, 8)-行列 $(A|E_4)$ に行基本変形を施していき、$(E_4|X)$ の形 (最初に A が入っていた部分を単位行列) にできるかどうかを調べます。その際のポイントはやはりガウスの消去法です。途中まではガウスの消去法の前進部分を適用して、中央の $|$ の左側の部分が階段型になるようにします。このプロセスが実行できていない答案が多数ありましたので、最初の部分を書いておきます。

$$(A|E_4) \xrightarrow[\text{①}\times(-1)+\text{④}]{\substack{\text{①}\times(-1)+\text{②}\\ \text{①}\times(-1)+\text{③}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}\times(-1)+\text{④}]{\text{②}\times(-2)+\text{③}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{④}\times(-1)+\text{③}]{\substack{\text{④}\times(-4)+\text{①}\\ \text{④}\times1+\text{②}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 2 & 0 & -3 & 12 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}\times2+\text{②}]{\text{③}\times1+\text{①}} \cdots$$

$|$ の左側が階段型になったら、ガウスの消去法の後退代入に当たる操作を行列のまま行って $|$ の左側の部分を単位行列 E_4 にしていきます。この方法で、与えられた行列 A は正則であることがわかり、逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{16}{3} & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が求まります。

■ 演習 7-2 について

pre7-2 と全く同種の問題です。よくできていました。(2) の QA のみ正解を書いておきます。次のいずれでも正解です。「第 1 行と第 3 行を入れ替えたのち、第 1 行と第 4 行を入れ替え、第 1 行と第 2 行を入れ替える。」「第 3 行と第 4 行を入れ替えたのち、第 1 行と第 2 行を入れ替え、第 2 行と第 3 行を入れ替える。」「第 1 行と第 2 行を入れ替えたのち、第 2 行と第 3 行を入れ替え、第 2 行と第 4 行を入れ替える。」その他、たくさんの正解があります。

■ 次回予告

次回は、行列式の余因子展開を学びます。余因子展開を使って、4 次以上の行列式を見通しよく計算ができるようになることが最大の目標です。

線形代数１・第 8 回 (2024 年 5 月 30 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。