No.8 2024年11月14日

線形代数2演習問題

8-1. (全射・単射の定義)

$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。

$$f(n) = 2n + (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

によって定義される写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) f は単射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

(2) f は全射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

8-2. (行列から定まる写像と全単射、逆写像)

次の式で定義される写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を考える：

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -6x - 2y \\ -x + 7y \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

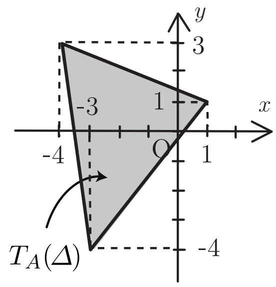
(1) $F = T_A$ となる 2 次正方行列 A を求めよ。

(2) F は全単射であることを示せ。さらに、その逆写像 F^{-1} を求めよ ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、$F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ を具体的に記述すること)。

線形代数２通信　[No.8]　2024 年 11 月 14 日発行

■ 演習 7-1 について

(1) 答えは $T_A(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T_A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ですが、答案には計算過程を書かなければなりません。



(2) 例年に比べると、$T_A(\Delta)$ の集合表示の正解者は多かったですが、図示の正解者はやや少なかったです。線形性より

$$\begin{aligned} T_A(\Delta) &= \{\ (1-s-t)A\mathbf{a} + sA\mathbf{p} + tA\mathbf{q} \mid s,t \geq 0,\ s+t \leq 1\ \} \\ &= \left\{\ (1-s-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}\ \middle|\ s,t \geq 0,\ s+t \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

になります。これは、$T_A(\mathbf{a}), T_A(\mathbf{p}), T_A(\mathbf{q})$ を頂点にもつ三角形の周および内部を表わしており、図示すると右上図の三角形 (周および内部を含む) になります。

■ 演習 7-2 について

(1) については、書き出しがよくない答案が目立ちました。(LM1) を確認するためには、まず「任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して」と書いてから $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \cdots$ のように = でつないでいき、最後に $F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ にたどり着くようにします。(LM2) については、「任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して」と書いてから、$F(t\mathbf{x}) = F\left(\begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}\right) = \cdots$ のように = でつないでいき、最後に $tF(\mathbf{x})$ にたどり着くようにします。

(2) の行列 A は、$\mathbb{R}^2$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$” を用いて $A = (F(\mathbf{e}_1)\ F(\mathbf{e}_2))$ により求めることができます。答えは $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ になります。

■ 第 7 回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q3 は $(2,3)$-行列 $A = (a_{ij})$ から定まる線形写像 T_A がどんな写像なのかを答える問題でした。写像を定めるときには、① 定義域、② 終域、③ 対応規則を明記しなければなりません。定め方の具体例は [例 7-1-2] にあり、T_A の定義はアブストラクトの 51 から 52 ページにあります。この問題の状況に当てはめて、解答枠には「$T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は」と書き、続けて対応規則を「$T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \cdots$ によって定義される」のように記します。「$\cdots$」の部分は成分で表示してください。
- ◦ Q4 の出来はとても悪かったです。①, ②にはそれぞれ線分 $\mathrm{P'Q'}$, 1 点集合 $\{\mathrm{P'}\}$ が入ります。集合ですから、後者において中括弧 { } は必要です。Q4 の第 2 項目は、図を使って線形写像の幾何学的な意味を答えるものでした。線形写像は線分の内分比を保つ写像ですから、線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点 X は線形写像 $T = T_A$ によって線分 $\mathrm{P'Q'}$ 上の $t : 1-t$ に内分する点に写されます。その様子をアブストラクトの 51 ページの図を参考に描いてください。文章による説明も忘れずに書き添えてください。

■ 次回予告

次回は、線形写像の核と像について学びます。核も像も数ベクトル空間の部分空間です。これらの定義と性質、次元および基底の求め方を説明します。

線形代数２・第８回 (2024 年 11 月 14 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。