No.8 2026 年 11 月 12 日

線形代数２演習問題

8-1. (全射・単射の定義)

$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。

$$f(n) = 2n + (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

によって定義される写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) f は単射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

(2) f は全射であるか否かを述べ、それを証明せよ。

8-2. (行列から定まる写像と全単射、逆写像)

次の式で定義される写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を考える：

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6x - 8y \\ -9x + 4y \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) $F = T_A$ となる 2 次正方行列 A を求めよ。

(2) F は全単射であることを示せ。さらに、その逆写像 F^{-1} を求めよ ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、$F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ を具体的に記述すること)。

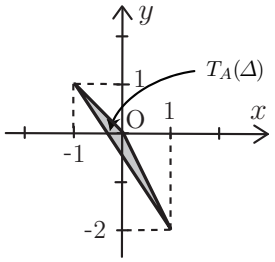
線形代数２通信 [No.8] 2026 年 11 月 12 日発行

■ 演習 7-1 について

例年に比べると、正解者は多かったです。T_A の線形性を利用して

$$T_A(\Delta) = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \geq 0,\ s+t \leq 1 \right\}$$

が得られます。“$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$” は一次独立なので、$T_A(\Delta)$ は原点と $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ を頂点にもつ三角形の周および内部であり、図示すると右図の三角形になります。内部を含むことから、右図では三角形をグレーに塗りましたが、その代わりに斜線を引いてください。また、どの部分が $T_A(\Delta)$ なのかを指示してください。



■ 演習 7-2 について

(1) については、書き出しがよくない答案が多かったです。また、必要な式変形が不足している答案がほとんどでした。(LM1) を確認するためには、まず「任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して」と書いてから $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}) = \cdots$ のように $=$ でつないでいき、最後に $F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ にたどり着くようにします。(LM2) については、「任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して」と書いてから、$F(t\mathbf{x}) = F(\begin{pmatrix}tx\\ty\end{pmatrix}) = \cdots$ のように $=$ でつないでいき、最後に $tF(\mathbf{x})$ にたどり着くようにします。

(2) の行列 A は、$\mathbb{R}^2$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$” を用いて $A = (F(\mathbf{e}_1)\ F(\mathbf{e}_2))$ により求められます。答えは $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\\9 & -8\end{pmatrix}$ です。

■ 第７回学習内容チェックシートについて

- Q3 は $(2,3)$-行列 A から定まる線形写像 T_A がどんな写像なのかを答える問題でした。写像を定めるときには、① 定義域 ② 終域 ③ 対応規則を明記しなければなりません。定め方の具体例は [例 7-1-2] にあり、T_A の定義はアブストラクトの 51 から 52 ページにあります。この問題の状況に当てはめて、解答枠には「$T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は $T_A(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \cdots$ によって定義される」のように記します。「$\cdots$」の部分は対応規則を成分で書いてください。
- Q4 の出来はとても悪かったです。①, ②にはそれぞれ線分 $\mathrm{P'Q'}$, 1 点集合 $\{\mathrm{P'}\}$ が入ります。集合ですから、後者において中括弧 { } は必要です。Q4 の第 2 項目は、図を使って線形写像の幾何学的な意味を答えるものでした。線形写像は線分の内分比を保つ写像ですから、線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点 X は線形写像 $T = T_A$ によって線分 $\mathrm{P'Q'}$ 上の $t : 1-t$ に内分する点に写されます。その様子をアブストラクトの 51 ページの図を参考に描いてください。文章による説明も忘れずに書き添えてください。

■ 次回予告

次回は、線形写像の核と像の定義と性質を学びます。

線形代数２・第８回 (2026 年 11 月 12 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。