

線形代数 3 演習問題

8-1. i を虚数単位とする。行列 $A = \begin{pmatrix} i & 3 & 3 \\ 3 & i & 3 \\ 3 & 3 & i \end{pmatrix}$ は正規行列であることを確認し、それをユニタリ行列によって対角化せよ。

■ 演習 7-1 について

(1) 標準基底に関する行列表示を求める問題でした。1 年次に学習済みの易しい問題ですが、出来はよくありませんでした。 $\mathbb{C}^3$ の標準基底 “ $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ” をとり、 $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3)$ を計算して、順番に並べれば、求める行列表示 $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \end{pmatrix}$ が得られます。

(2) は [系 7-2-2] を用いて求めます。(1) で求めた行列を A とおくと、 $\mathbb{C}^n$ の標準基底は正規直交基底であることから、 T^* の標準基底に関する行列表示は $A^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ になります。

ここまで求められている人は結構いたのですが、この問題で問われているのは随伴写像 T^* なので、写像の表現形式に則って次のように解答する必要があります。 $T^*: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ は

$$T^*\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ -ix+y \\ iy \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2\right)$$

によって与えられる。

■ 演習 7-2 について

(1) は、 $U^*U = E_n$ の両辺の行列式をとることにより、事前練習用問題の pre7-2(1) のようにして証明することができます。ただし、気をつけなければいけないのは、直交行列と違い、 $|U^*| = \overline{|U|}$ となることです。このことに注意し、 $z = |U|$ とおくと、 $\bar{z}z = |U^*| \cdot |U| = |U^*U| = |E_n| = 1$ が成り立つことがわかります。 $\bar{z}z = 1$ は $z = |U|$ が大きさ 1 の複素数であることを意味していますから、これで証明が終わります。行列式の記号と絶対値の記号がともに $| \cdot |$ なので、混乱を避けたいときには、行列式 $|A|$ を $\det A$ のように表わすとよいでしょう。

(2) は U^*U を計算して単位行列になることを確かめます。 U^* を $\begin{pmatrix} A & iA \\ iA & A \end{pmatrix}$ としている（または複素共役をとっていない！）答案がとて多かったです。複素共役に加えて転置も取らなければなりません。このことに注意し、 A がユニタリ行列であることを使って、次が得られます：

$$U^*U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} A^* & -iA^* \\ -iA^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & iA \\ iA & A \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A^*A & 0 \\ 0 & 2A^*A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = E_{2n}.$$

これは U がユニタリであることを示しています。

■ 第 7 回学習内容チェックシートについて

Q3(i) 以外はほとんどの人が正解できていました。この問題における T は V 上の線形変換なので、[定理 7-2-1] において $U = V$ の状況下で書く必要があります。やや多かった誤答として、「任意の $v \in V$ に対して $\langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle$ 」というのがありました。1 つの $v \in V$ だけでは足りません。線形変換 $T: V \rightarrow V$ であったとしても、 V から任意に 2 元 u, v をとってきて 等式 (7-2a) が満たされなければなりません。

■ 次回予告

正規行列の代表例としてユニタリ行列、エルミート行列、歪エルミート行列がありますが、今回はこれらの行列の固有値を持つ特徴を調べます。特に、エルミート行列の固有値は実数であることに注目し、すべての固有値が非負のエルミート行列に対しては平方根をとることができ、複素数に対する極形式に相当するものが、複素正方行列に対しても成り立つことを導きます。

線形代数3・第8回(2025年6月2日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。