

線形代数 4 演習問題

8-1. 3 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_3$ で表わす：

$$\mathbb{R}[x]_3 = \{ a_3 + a_2x + a_1x^2 + a_0x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}.$$

写像 $T : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ を

$$T(f(x)) = f(x) - x^3 f(x^{-1}) + f^{(3)}(x)$$

によって定義する。ここで、 $f^{(3)}(x)$ は $f(x)$ を 3 回微分して得られる多項式を表わす。

- (1) T は $\mathbb{R}$ -線形変換であることを示せ。
- (2) $\mathbb{R}[x]_3$ の基底 “ $1, x, x^2, x^3$ ” に関する T の行列表示を求めよ。
- (3) $\text{Ker } T$ および $\text{Im } T$ の基底を一組ずつを求めよ。

■ 第 7 回学習内容チェックシートについて

- Q3(2) の解答に $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \frac{t^2}{2} \\ e^{\alpha t} t \\ e^{\alpha t} \end{pmatrix}$ というものが 2 割程度ありました。ここで求められているのは、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ を満たす微分方程式

$$(*) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = J(\alpha, 3)\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$$

の解 $\mathbf{x}$ ですから、[定理 7-3-2](2) の証明の「解の存在」に書かれている部分から、 $\mathbf{x}(t) =$

の右側には $\begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\frac{a_0}{2}t^2 + a_1t + a_2) \\ e^{\alpha t}(a_0t + a_1) \\ e^{\alpha t}a_0 \end{pmatrix}$ を書けばよいことがわかります。

- Q3(3) は、(2) あるいは [定理 7-3-2](2) の後半の内容を反映させて解答します。 $\mathbb{R}^3$ に基底 “ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ” が与えられると、(2) で解答したように、各 $\mathbf{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) に対して、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_i$ を満たす微分方程式 (*) の解 $\mathbf{x}$ が一意的に定まります。この解を $\mathbf{x}_i$ とおき、組 “ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ” を作ると、これは微分方程式 (*) の解全体からなるベクトル空間 W の基底になります。

■ 演習 7-1 について

(1) は部分空間でないことを示す問題です。(SS0), (SS1) は成り立っているので、(SS2) が成り立たないことを示します。そのために、具体例を挙げます。単位行列 $E_n \in W$ のスカラー倍 iE_n を考えましょう (ここで、 i は虚数単位です)。このとき、 $(iE_n)^* = -iE_n \neq iE_n$ となるため $iE_n \notin W$ です。このように、(SS2) が成り立たないことを示すことができます。

(2) はよくできていました。(SS0) の証明では、 $M_n(\mathbb{C})$ の零ベクトルである零行列 O が $O^* = O$ を満たすことを確認します。この等式を確認した後、「よって、 $O \in W$ である」と結論を書きます。(SS1) の証明では、任意に $A, B \in W$ をとり、 $(A+B)^*$ を計算し、 $(A+B)^* = A+B$ が成り立つことを確認します。その後、「よって、 $A+B \in W$ である」と結論を書きます。(SS2) の証明では、任意に $A \in W$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ をとり、 $(tA)^*$ を計算し、 $(tA)^* = tA$ が成り立つことを確認します。その後、「よって、 $tA \in W$ である」と結論を書きます。

(3) の出来はあまりよくありませんでした。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ に対して

$$A \in W \iff \bar{a} = a, \bar{b} = c, \bar{d} = d \iff a, d \in \mathbb{R}, \bar{b} = c$$

となるので、 W に属する行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\operatorname{Re} b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\operatorname{Im} b) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表わされることがわかります。上式の右辺に現れた 4 つの行列を左から順に A_1, A_2, A_3, A_4 とおくと、これらは W に属しており、 W を張ることがわかります。さらに、 $t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4 = O$ ($t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$) のとき $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ となることが確かめられるので、“ A_1, A_2, A_3, A_4 ” は $\mathbb{R}$ 上一次独立であり、したがって W の基底をなします。このことから $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$ も従います。

■ 次回予告

次回は、与えられたベクトル空間を部分空間に分解することを考えます。その分解は直和 (分解) と呼ばれます。直和分解の仕方や直和分解したときの次元の計算方法などを学びます。

線形代数4・第8回(2025年11月17日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。