

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

8-1. 次の各関数の 2 階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^4 - 5x^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

(2) $g(x, y) = e^{xy^2} \cos y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

8-2. 関数 $f(x, y) = \log(e^x + \cos y + 1) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ について、第 3 次 Maclaurin 展開を求めよ。但し、剰余項は計算しなくてよい。

2025 年 11 月 12 日発行

■ 第7回の学習内容チェックシートについて

- Q1 の第 3 項目では、開区間 I 上で定義された関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と領域 D 上で定義された関数 $f = f(x, y)$ との合成関数 $f \circ l$ の定義と導関数を問う問題です。合成関数 $f \circ l$ を答える最初の枠内に $f(l(t)) = f(x(t), y(t))$ を書き込もうとして、大幅にはみ出しているシートが複数ありました。ここの枠内には $f(x(t), y(t))$ のみを書いてください。これに続いて $f \circ l$ の導関数の公式を書く枠がありますが、 $\frac{\partial f}{\partial x} \circ l \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ l \cdot \frac{dy}{dt}$ と書かれたものがやはり複数ありました。○と・を並列して書くと、積をとってから合成するのか、合成してから積をとるのが曖昧になります。ここでは後者の方なので、アブストラクトの (7-1d) のように、 $\frac{\partial f}{\partial x} \circ l$ と $\frac{\partial f}{\partial y} \circ l$ をそれぞれ括弧で括るようにします。同様のことは、第 4 項目についても当てはまります。

■ 演習 7-1 について

概ねできていました。連鎖定理 [定理 7-3-2] を使って、指定された偏微分係数を求めます。その公式に当てはめる際に、問題文には x, y が与えられていないので、自分で、「 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ ($(u, v) \in \mathbb{R}^2$) とおく」のような宣言が必要です。この記述がない答案が多かったです。あとは、公式に当てはめて計算するだけですが、 $\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v = x$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -e^u \sin v = -y$, $\frac{\partial y}{\partial u} = e^u \sin v = y$, $\frac{\partial y}{\partial v} = e^u \cos v = x$ に気がつく、計算の見通しがよくなります。実際、この関係式を見抜いて解答した答案が何枚もありました。

計算結果のみ記しておくと、 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \left(\log 2, -\frac{\pi}{3} \right) = 0$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \left(\log 2, -\frac{\pi}{3} \right) = 4\sqrt{3}$ となります。

■ 演習 7-2 について

(1) はよくできていましたので、(2) について少し説明します。問題文は $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$ を $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を用いてと書かれているために、半数程度の人が (1) で求めた偏導関数に関する 2 つの等式を $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ について解いてから、二乗の和を計算するという方針をとっていました。この方針自体は間違っていないのですが、 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ について解く過程がないものが多かったです。もっとも、この問題では、 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めずに、(1) で導いた式から $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right)^2$ を計算してしまった方が簡単です。

最終的な答えは、 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right)^2$ になりますが、この等式を導く最後の過程で $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を使う場面があります。これをしっかり書かずに、結論だけを書くといった論証不足の答案もかなりありました。

■ 次回予告

第 5 回の授業で、2 変数関数の極値の候補は $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を解くことにより求められることを説明しました。今回は、それらの候補の中から実際に極値になっているものを決定する有効な判定法—ヘッシアン (Hessian) 判定法—を説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎2) ・ 第8回 (2025 年 11 月 12 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。