No.8 2026 年 11 月 12 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

8-1. 次の各関数の 2 階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^3y^2 - 3xy^4 + 4x^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

(2) $g(x,y) = \sin(x^2 - 2y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

8-2. 関数 $f(x,y) = \log(e^x + y^2 + 1)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ の第 3 次 Maclaurin 展開を求めよ。但し、剰余項は計算しなくてよい。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.8]

2026 年 11 月 12 日発行

■ 第７回の学習内容チェックシート Q1 について

Q1 の第 3 項目は、2 つの微分可能な関数 $l(t) = (x(t), y(t))$ と $f = f(x, y)$ の合成関数 $f \circ l$ の定義と導関数を問う問題でした。導関数のやや多かった誤答として

$$\frac{\partial f}{\partial x}(l(c)) \cdot \frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(l(c)) \cdot \frac{dy}{dt}(c) \quad \text{や} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \circ l \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ l \cdot \frac{dy}{dt}$$

がありました。答えるべきものは導関数なので、前者のように特定の実数 c をつけるのは不適切です。後者の書き方の場合、積をとってから合成するのか、合成してから積をとるのかが曖昧になるため、$\frac{\partial f}{\partial x} \circ l$ と $\frac{\partial f}{\partial y} \circ l$ をそれぞれ括弧で括るようにします。同様のことは、第 4 項目の偏導関数の公式についても当てはまります。

■ 演習 7-1 について

概ねできていました。連鎖定理 [定理 7 - 3 - 2] を使って、指定された偏微分係数を求めます。その公式に当てはめる際に、問題文には x, y が与えられていないので、自分で、「$x = u^2 \cos \frac{v}{u},\ y = u^2 \sin \frac{v}{u}$ $(u > 0)$ とおく」のような宣言が必要です。この記述がない答案が多かったです。あとは、公式 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$ に当てはめて計算するだけです。x, y の置き方により、$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u \cos \frac{v}{u} + v \sin \frac{v}{u},\ \frac{\partial y}{\partial u} = 2u \sin \frac{v}{u} - v \cos \frac{v}{u}$ となりますが、その計算過程がわかるように書く必要があります。$(u, v) = (6, -\pi)$ のとき $(x, y) = (18\sqrt{3}, -18)$ となることが確かめられるため、先の公式に代入して $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(6, -\pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(18\sqrt{3}, -18) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(6, -\pi) + \frac{\partial f}{\partial y}(18\sqrt{3}, -18) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(6, -\pi) = \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ を得ることができます。

■ 演習 7-2 について

(1) は連鎖定理 [定理 7 - 3 - 2] から直ちに従うわけですが、$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は u, v の関数としてみていることがわかるように書く必要があります。$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = 2v\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 2u\frac{\partial f}{\partial x} - 2v\frac{\partial f}{\partial y}$ と書いたあと、「但し、$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(2uv, u^2 - v^2),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(2uv, u^2 - v^2)$」を付け加えます。

(2) は、(1) で求めた 2 式を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ について解き、$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$ を計算すれば求められますが、やや大変です。そこで、(1) で導いた 2 式をそれぞれ 2 乗して和をとってみます。すると、

$$(*) \qquad \Big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\Big)^2 = 4(u^2 + v^2)\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2\Big).$$

が得られます。この形で終わっている解答が数枚ありましたが、$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$ を $u, v, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ を用いて表わす問題なので、$(*)$ の両辺を $4(u^2 + v^2)$ で割って、

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}\Big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\Big)^2$$

の形で答える必要があります。なお、$(u, v) \neq (0, 0)$ より $u^2 + v^2 \neq 0$ なので、$(*)$ の両辺を $4(u^2 + v^2)$ で割ることができます。

■ 次回予告

第 5 回の授業で、２変数関数の極値の候補は $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を解くことにより求められることを説明しました。次回は、それらの候補の中から実際に極値になっているものを決定する有効な判定法—ヘッシアン (Hessian) 判定法—を説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 8 回 (2026 年 11 月 12 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。