線形代数2演習問題

9-1. (線形写像の核)

(m,n)-行列 A から定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について、

$$\mathrm{Ker}\, T_A = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ に対して } \langle \mathbf{x}, A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \rangle = 0\ \}$$

が成り立つことを示せ。但し、A^{T} は A の転置行列であり、$\langle\ ,\ \rangle$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の内積である。

9-2. (張られる空間の次元と基底)

3次列ベクトル

$$\text{“}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\text{”}$$

によって張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする。

(1) W の次元を求めよ。

(2) “$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$” の中から W の基底となるベクトルの組を1組選べ。

(3) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は W に属するか否かを調べよ。属する場合には、上で選んだ基底の一次結合で表わせ。

線形代数２通信 [No.9]

2024 年 11 月 21 日発行

■ 第８回学習内容チェックシートについて

∘ Q1 の表の後半の 3 つには恒等写像、合成写像、逆写像の定義を書き入れます。合成写像の定義については、定義域と終域が明記されていない解答がありました。逆写像の定義については、対応規則の記述が不十分な解答が目立ちました。全単射 $f: X \longrightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} は、定義域が Y、終域が X、対応規則が「Y の各元 y に対して $f(x)=y$ を満たす X の元 x を対応」させることによって与えられる写像です。

∘ Q2 は全射であること・ないこと、単射であること・ないことの状況をベン図で表わす問題でした。X の中に打たれている 3 点すべての行き先を指定しなければなりませんが、そうなっていないものがわずかですがありました。

■ 演習 8-1 について

今年はよくできていました。

(1) f は単射ではありません。n に $0,1,2$ などの具体的な数値を代入して計算してみると、予想がつくと思います。ただし、実際に単射でないことを示すには、$m \neq n$ となる $m,n \in \mathbb{Z}$ であって $f(m)=f(n)$ となるような具体例を与える必要があります。そのような m,n として $0,1 \in \mathbb{Z}$ が見つかります ($0 \neq 1$ ですが、$f(0)=1=f(1)$ となっています)。

(2) f は全射ではありません。というのも、$f(n)$ の式から値が奇数しかとらないことが予想できるからです。きちんと証明するために、具体例を挙げます。$0 \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n)=0$ となる整数 n が存在しないことを示します。背理法を使います。仮に $f(n)=0$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ が存在したとしましょう。すると、$2n=-(-1)^n$ が成り立つことになります。しかし、左辺は偶数である一方、右辺は ± 1 の奇数なので、この等式は矛盾しています。このようにして、f は全射でないことが示されます。

■ 演習 8-2 について

(1) pre8-2(1) と全く同様にして、$A=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ が求められます。

(2) pre8-2(2) と全く同様に求めることができます。A の行列式を計算すると $|A|=-44 \neq 0$ となるため、A は正則であり、したがって、$F=T_A$ は全単射です。F^{-1} の下での元の対応規則を書くには、逆行列 A^{-1} を求めればよいわけですが、$|A|=-44$ で割ることを忘れている答案が非常に多かったです。公式に当てはめて、$A^{-1}=\dfrac{1}{-44}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ のように求められます。

したがって、逆写像 $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は $F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{44}x-\frac{1}{22}y \\ -\frac{1}{44}x+\frac{3}{22}y \end{pmatrix}$ $(x,y \in \mathbb{R})$ により与えられることになります。$F^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ の式だけしか書かれていない答案が多数ありましたが、写像を定めるときには、対応規則だけでなく、定義域と終域も明記することが重要であることを心に刻んでおいてください。

■ 次回予告

次回の授業では、いよいよ抽象ベクトル空間が登場します。抽象ベクトル空間が身近に感じられるように、例を沢山挙げて、ベクトル空間およびその部分空間について説明します。

線形代数２・第９回 (2024 年 11 月 21 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。