

線形代数 3 演習問題

9-1. 2 次複素正方行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 + \sqrt{2}i \\ -2 - \sqrt{2}i & 7 \end{pmatrix}$ は半正定値エルミートか否かを調べ、半正定値エルミートの場合には $A = X^2$ を満たす半正定値エルミート行列 X を求めよ。但し、 i は虚数単位である。

9-2. i を虚数単位とする。エルミート行列は対角化可能であることを用いて、 n 次複素正方行列 A がエルミートならば、 $A + iE_n$ は正則であることを示せ。

■ 演習 8-1 について

最初に、 $AA^* = A^*A$ を確認します。真面目に AA^*, A^*A を計算してどちらも $\begin{pmatrix} 19 & 9 & 9 \\ 9 & 19 & 9 \\ 9 & 9 & 19 \end{pmatrix}$ であることがわかります。とても易しい問題でしたが、 A は実行列であるとか、 $A^* = -A$ であるとか、あり得ない解答が目立ちました。

A をユニタリ行列により対角化するためのプロセスは次の 4 段階からなります：① A の固有値を求める。② A の各固有値に対して固有空間を求める。③ 各固有空間の基底を一組ずつ与えて、それらを正規直交化する。④ 得られた正規直交基底を並べて、ユニタリ行列を作る。

① 固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算して、 $\Delta_A(x) = 0$ を解けば求められます。工夫して計算すれば (例えば、第 1 行に第 2 行から第 3 行までを足しあげて、第 1 列の -1 倍を第 2 列と第 3 列に加えてみましょう)、因数分解の形で $\Delta_A(x) = (x-i-6)(x-i+3)^2$ が求まり、固有値は $i+6, i-3$ であることがわかります (授業で配布したものからグレー部分を修正)。

② A の固有値 $\lambda = i+6, i-3$ のそれぞれに対して、連立一次方程式 $(\lambda E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ をガウスの消去法で解きます。結果は次のようになります。

$$W(i+6, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad W(i-3, T_A) = \left\{ \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

③ $W(i+6, T_A)$ と $W(i-3, T_A)$ の基底として、それぞれ “ $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ”, と “ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ” を選びます。 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は直交してないので、グラム-シュミットの直交化法を用いて、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を正規直交化して、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を作ります。 $U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3)$ とおくと、 U はユニ

タリ行列で、 $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, U^{-1}AU = \begin{pmatrix} i+6 & 0 & 0 \\ 0 & i-3 & 0 \\ 0 & 0 & i-3 \end{pmatrix}$ となります。

■ 第 8 回学習内容チェックシートについて

Q2(4)(iii) の解答に不十分なものが多かったので説明しておきます。線形変換 T の固有値 λ に属する T の固有空間 $W(\lambda, T)$ は、 $T(v) = \lambda v$ を満たす $v \in V$ からなるので、 $T(v) = \lambda v$ を v について直接解けば $W(\lambda, T)$ は求まります。しかしながら、その計算は大変なことが多いので、 V に基底 $\mathcal{B}$ を 1 つ指定して T を行列表示し、その行列表示 A についての等式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ について解く問題に置き換えます。 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ は $(\lambda E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と書き換えることができるので、結局、連立一次方程式 $(\lambda E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことに帰着されます。これで終わりにしてしまいそうですが、得られた解は数ベクトルなので、それを最後に指定した基底 $\mathcal{B}$ の下で V の元に戻す操作が必要です。

■ 次回予告

対称行列、交代行列、直交行列などの実数成分の正規行列は、ユニタリ行列により対角化できますが、直交行列では対角化できるとは限りません。次回は、実正規行列が直交行列により、どこまで簡単な行列に変換できるかという問題を取り上げます。

線形代数3・第9回(2025年6月9日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。