# 線形代数 4 演習問題

**9-1**. 2 次複素正方行列全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の部分集合

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える。

(1) $W_1$ は $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の部分空間であることを示せ。

(2) $W_2$ も $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の部分空間となる。このことを既知として、$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ が $W_1$ と $W_2$ の直和になることを示せ。

# 線形代数 4 通信 [No.9]　　2025 年 11 月 24 日発行

## ■ 第 8 回学習内容チェックシートについて

∘ Q2 は、$\mathbb{K}$-線形写像 $T : V \longrightarrow U$ に対して、$V$ の基底 $\mathscr{B} =$ “$v_1, v_2, v_3$” と $U$ の基底 $\mathscr{B}' =$ “$u_1, u_2$” に関する行列表示 $A$ の求め方を書く問題でした。説明が過剰なわりに、肝心の $A$ の具体的表示がないシートが多数ありました。解答スペースは限られていますから、必要なことを最小限書くように心がけてください。次のように書くとよいでしょう。各 $j = 1, 2, 3$ について、$T(v_j) \in U$ は $\mathscr{B}'$ の一次結合として $T(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2$ $(a_{1j}, a_{2j} \in \mathbb{K})$ のように一意的に表わされる。その係数を縦に並べて作られる行列 (ここに $A$ の具体的な表示を書く) が基底 $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ に関する $T$ の行列表示 $A$ である。

∘ Q3(2) は、単に $B = P^{-1}AP$ のみ書かれているシートが少なからずありました。$P$ についての説明 (具体的には、[定理 8-3-1] の最後の行) が必要です。

## ■ 演習 8-1 について

(1) は与えられた写像 $T$ が線形変換であることを証明する問題でした。出来た人は少なかったです。線形写像であるための 2 条件 (LM1), (LM2) を満たすことを確かめます。(LM1) を満たすことの証明は次のように書くとよいでしょう。まず、任意に $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ をとります。示すべきことは $T\big(f(x)+g(x)\big) = T\big(f(x)\big)+T\big(g(x)\big)$ です。これを示すために、$h(x) = f(x)+g(x)$ とおきます。すると、$x^3h(x^{-1}) = x^3f(x^{-1}) + x^3g(x^{-1}),\ h^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) + g^{(3)}(x)$ が成り立ちます。これらを用いることで、等式

$$\begin{aligned} T\big(f(x) + g(x)\big) = T\big(h(x)\big) &= h(x) - x^3h(x^{-1}) + h^{(3)}(x) \\ &= f(x) - x^3f(x^{-1}) + f^{(3)}(x) + g(x) - x^3g(x^{-1}) + g^{(3)}(x) \\ &= T\big(f(x)\big) + T\big(g(x)\big) \end{aligned}$$

を導くことができます。同様にして、任意の $f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して等式 $T\big(tf(x)\big) = tT\big(f(x)\big)$ を導くことができます。

(2) は正解者が多かったです。

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 - x^3 \cdot 1 - 0 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ T(x) &= x - x^3 \cdot x^{-1} + 0 &&= 0 \cdot 0 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ T(x^2) &= x^2 - x^3 \cdot x^{-2} + 0 &&= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ T(x^3) &= x^3 - x^3 \cdot x^{-3} - 3 \cdot 2 &&= 5 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 \end{aligned}$$

より求める行列表示は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ になります。

(3) では (2) で求めた $T$ の行列表示 $A$ に行基本変形を施して階段型にすることにより $\mathrm{rank}\,A = 3$ が求められます。したがって、$\dim(\mathrm{Ker}T) = \dim(\mathrm{Ker}T_A) = 4 - \mathrm{rank}\,A = 1$ であり、$\dim(\mathrm{Im}T) = \dim(\mathrm{Im}T_A) = \mathrm{rank}\,A = 3$ です。あとは、事前練習用問題 pre8-1(3) のヒントと略解に示されているようにして $\mathrm{Ker}T$ の基底として “$x + x^2$” が見つかり、$\mathrm{Im}T$ の基底として “$1 - x^3, x - x^2, 5 - x^3$” が見つかります。

## ■ 次回予告

次回は、線形変換の固有値、固有ベクトル、固有空間を復習してから、固有空間が持つ「線形変換の下での不変性」と、直和分解と固有値・固有空間との関係について学びます。

**線形代数４・第９回 (2025 年 11 月 24 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。