

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題**9-1. 関数**

$$f(x, y) = 4x^4 + 3x^2y^2 + xy^3 - 8x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

について以下の各問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数を求めよ。
- (2) 関数 $f(x, y)$ の第 2 次偏導関数を求めよ。
- (3) 関数 $f(x, y)$ の極値とその極値を与える点を求めよ。

2025 年 11 月 19 日発行

■ 第8回の学習内容チェックシート Q1 について

- 最初の枠に「偏導関数」と書き入れた人が多かったです。よく考えて書いたとは思えません。その枠に「偏導関数」を入れたとき、意味が通じる文章になるでしょうか。前後の文章をよく読めば、その枠の中には、 $f(x, y)$ の偏導関数をさらに偏微分することによって定義される関数につけられた名前を入れるべきであることがわかるでしょう。
- 第 3 次 Maclaurin 展開の式において、2 次の項の係数を間違えているものが多かったです。 $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$ を展開したあとで、 $2! = 2$ で割る必要があります。したがって、 x^2, xy, y^2 の係数は順に $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$ となります。

■ 演習 8-1 について

第 2 次偏導関数は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ の 4 つなので、これらを求めます。このうち、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は、連続ならば一致します。問題 (1) の関数は多項式関数、(2) の関数は多項式関数、指数関数、三角関数の積と合成になっているので、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は共に連続となり、両者は一致します。より一般に、 f が多項式関数、指数関数、三角関数、べき関数およびそれらの和差積商や合成で与えられる関数ならば何回でも微分可能なので、特に、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は連続であり、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が成立します。

(1) の関数 f については $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 2y^4 - 15x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 8xy^3$ より、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - 30x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - 8y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 24xy^2$ となり、(2) の関数 g については $\frac{\partial g}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \cos y$, $\frac{\partial g}{\partial y} = e^{xy^2} (2xy \cos y - \sin y)$ より、 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^4 e^{xy^2} \cos y$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = e^{xy^2} (2y(xy^2 + 1) \cos y - y^2 \sin y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = e^{xy^2} ((4xy^2 + 2x - 1) \cos y - 4xy \sin y)$ となります。

■ 演習 8-2 について

第 3 次 MacLaurin 展開は (高々 2 次の多項式) + (ラグランジュの剰余項) の形をしています。ラグランジュの剰余項は求めなくてよいとしているので、2 階偏導関数まで計算し、公式に代入すればよかったのですが、3 次の項まで計算し、勝手にラグランジュの剰余項を落としたものが少なくありませんでした。

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + \cos y + 1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sin y}{e^x + \cos y + 1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{e^x(\cos y + 1)}{(e^x + \cos y + 1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{e^x \sin y}{(e^x + \cos y + 1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-(e^x + 1) \cos y - 1}{(e^x + \cos y + 1)^2}$ より、与えられた関数の第 3 次 MacLaurin 展開は次のようになります：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 + R_3 \\ &= \log 3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}y^2 + R_3 \quad (R_3 \text{ はラグランジュの剰余項}). \end{aligned}$$

R_3 は計算しなくてよいものの、書かなくてよいわけではありません。

■ 次回予告

2 変数関数の積分は重積分と呼ばれます。次回からその重積分の理論を学びます。今回は特に長方形領域上での重積分の定義と計算方法を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) ・ 第 9 回 (2025 年 11 月 19 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。