

基礎数学演義3 第10回・問題解答&要約シート(1)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q10-1. 既約多項式であるための条件 (IP2) を文章で表現せよ。

Q10-2. (1) $X^3 - 2X + \sqrt{3} \in \mathbb{R}[X]$ を $\mathbb{R}[X]$ において既約な多項式の積に分解せよ。

(2) $X^3 - 2X + \sqrt{3} \in \mathbb{R}[X]$ を $\mathbb{C}[X]$ において既約な多項式の積に分解せよ。

Q10-3. \mathbb{F}_3 上既約で、かつ、最高次係数が1である2次の多項式 $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ をすべて求めよ。

基礎数学演義3 第10回・問題解答&要約シート(2)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q10-4. [定理 10-3-1] における既約分解の可能性の部分をも、命題関数 $P(n)$ を次のように定めて、数学的帰納法により証明する。

$P(n)$: $\deg f = n$ である任意の $f \in \mathbb{K}[X]$ に対して、

$f = p_1 \cdots p_k$ となる \mathbb{K} 上既約な多項式 p_1, \dots, p_k が存在する

(1) 帰納法による証明の第1段が成り立つことを確かめよ。

(2) 帰納法による証明の第2段を書け。

Q10-5. $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ に対して $g(X) := f(X+1) \in \mathbb{K}[X]$ とおく。 $f(X)$ が \mathbb{K} 上既約ならば $g(X)$ も \mathbb{K} 上既約であることを示せ。(ヒント: 対偶を証明する。)

Q10-6. アイゼンシュタインの既約判定法に基づいて、整数係数多項式

$$X^4 + 12X^3 + 63X^2 + 42X + a$$

が \mathbb{Q} 上既約であるような2桁の正の整数 a を5個与えよ。