No.10 2024年6月13日

線形代数１演習問題

10-1. (行列式と行列の正則性)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a-6 & 3 & 7 \\ 1 & a-2 & -1 \\ -5 & 3 & a+6 \end{pmatrix}$ が正則でないのは、a がどんな値のときか？そのような a の値をすべて求めよ。

10-2. (行列の積と行列式)

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & ab+bc+ca & a^2b+b^2c+c^2a \\ a^2+b^2+c^2 & ab^2+bc^2+ca^2 & a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \end{pmatrix}$ の行列式を、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} B$ となる 3 次正方行列 B を見出すことにより因数分解せよ。

線形代数１通信 [No.10]

2024 年 6 月 13 日発行

■ 第 9 回の学習内容チェックシートについて

∘ Q1 の最後の行列式の値の誤答として 0 や 1 というものが多かったです。正しい値は -1 になります。次のように考えましょう。与えられた行列式において、第 1 行と第 n 行を入れ替えると単位行列 E_n になります。2 つの行を入れ替えると行列式の値は符号が変わるので、Q1 の最後の行列式の値は、$|E_n|$ の -1 倍、つまり、-1 となるわけです。

∘ Q3 の最初の枠の解答では、「1 つの行あるいは列に 0 ができるだけ多くなるようにする」とだけ書かれているものがありました。どんな操作を行いそのような形にするのか、そして、そのような形にすることができた後に、何を行うのかについても記述してください。

∘ Q3 の 2 番目の枠の解答として「単に計算が楽になるから」というものがありましたが、なぜ楽になるのかを、Q3 の最初の枠の解答と関連づけて答えてください。

■ 演習 9-1 について

定義通りに計算するだけの問題です。$|A|$ を第 4 列に関して余因子展開することにより、

$$f_0(x) = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & x-3 & 10 \\ 1 & 2 & x-5 \\ x & x & x \end{vmatrix}, \qquad f_1(x) = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & x-5 \\ x & x & x \end{vmatrix},$$

$$f_2(x) = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & x-3 & 10 \\ x & x & x \end{vmatrix}, \qquad f_3(x) = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & x-3 & 10 \\ 1 & 2 & x-5 \end{vmatrix}$$

が得られ、それぞれの行列式を計算することで、

$$f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = -x^3 + 10x^2 - 15x, \quad f_3(x) = x^3 - 9x^2 + 5x + 15$$

と求められます。3 次行列式はサラスの方法で計算できますが、$f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ に関しては、第 3 行から x をくくり出してから、第 3 行の適当な定数倍を第 1 行と第 2 行にそれぞれ加えて 0 を増やし、0 が増えた列に関して余因子展開しましょう。$f_3(x)$ に関しては、第 1 行に足しあげる操作を行って見ましょう。$x+1$ でくくり出せることがわかります。その後、第 1 行の適当な定数倍を第 2 行と第 3 行にそれぞれ加えて、0 を増やしてから計算するとよいでしょう。

■ 演習 9-2 について

最初に第 1 列から 3 をくくり出してから、ガウスの消去法と同じ要領で、①×(−1)+②, ①×(−1)+③, ①×(−1)+④ を行い、第 1 列の第 2 行目以下を 0 にします。その行列式を第 1 列に関して余因子展開します。すると、$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ となることがわかります。続けて第 3 行に関して余因子展開します。すると、$|A| = 3\cdot(-1)^{3+3}\,1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3) = -9$ が得られます。

■ 次回予告

次回は、再び、階数を取り上げます。今までは行に関する基本変形ばかりを考えてきましたが、列に関する同様の変形を導入して、両方用いてどのような行列も、“対角線”上に 1 がいくつか並びあとの部分はすべて 0 であるような行列 (階数標準形) に変形できることを示します。

線形代数１・第 10 回 (2024 年 6 月 13 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。