

線形代数 3 演習問題

10-1. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ のとき、 A が定める $\mathbb{R}$ -線形変換 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は回転移動を表わす。その回転軸と回転角を求めよ。

■ 訂正

以下の 2 箇所の誤記を訂正します。HP 上のファイルは修正版に差し替え済です。

○ アブストラクト 65 ページ [補題 9-1-1] の 2 行上：

(誤) $T(v) - \lambda v \neq 0_V$ となる $v \in V \rightarrow$ (正) $T(v) - \lambda v = 0_V$ となる 0_V でない $v \in V$

○ 線形代数 3 通信 [No.9] の「演習 8-1 について」における 9 行目：

(誤) $\Delta_A(x) = (x - i - 6)^2(x - i + 3) \rightarrow$ (正) $\Delta_A(x) = (x - i - 6)(x - i + 3)^2$

■ 演習 9-1 について

事前練習用問題 pre9-1 と同じ方法で解くことができます。まず、 A がエルミート行列であること、すなわち、 $A^* = A$ を確認します。次に、固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_2 - A|$ を計算して固有値を求めます。その結果、 A の固有値は 4, 9 とわかり、どちらも 0 以上なので、 A は半正定値です。固有値 $\lambda = 4, 9$ に属する固有空間 $W(\lambda, T_A)$ は計算により次のように求められます。

$$W(4, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2}i \\ 2 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad W(9, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

それぞれの固有空間から $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2}i \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}$ を選ぶと、 $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) となるので $U := (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)$ はユニタリ行列であり、求める半正定値エルミート行列 $X = U \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & -2 + \sqrt{2}i \\ -2 - \sqrt{2}i & 13 \end{pmatrix}$ を得ることができます。

なお、本問は 1.5 点満点、次の演習 9-2 は 0.5 点満点で採点しました。

■ 演習 9-2 について

$A \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミートであるとき、ユニタリ行列 U を適当に選ぶと $U^{-1}AU$ は対角行列になり、その対角成分を上から $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とおくと、これらはすべて実数になります。すると、 $U^{-1}(A + iE_n)U = U^{-1}AU + iE_n$ も対角行列となり、その対角成分は上から $\lambda_1 + i, \dots, \lambda_n + i$ となります。したがって、 $|U^{-1}(A + iE_n)U| = (\lambda_1 + i) \cdots (\lambda_n + i)$ となりますが、 λ_j ($j = 1, \dots, n$) は実数なのでこの行列式は 0 ではありません。 $|U^{-1}(A + iE_n)U| = |U^{-1}| \cdot |A + iE_n| \cdot |U| = |A + iE_n|$ から $|A + iE_n| \neq 0$ が導かれ、このことから $A + iE_n$ は正則であることがわかります。

行列 $X = (A + iE_n)^{-1}(A - iE_n)$ はユニタリ行列になることが証明できます。エルミート行列 A からユニタリ行列 X への変換は、複素数平面上の、実軸を単位円周に写す（ケーリー変換と呼ばれる）一次分数変換 $w = \frac{z - i}{z + i}$ に対応しています。

■ 第 9 回学習内容チェックシートについて

- Q1(ii) は元の対応規則だけしか書かれていないものが多数ありました。元の対応規則だけでなく、 $T - \lambda \text{id}_V : V \rightarrow V$ と書いて定義域と終域を明示してください。
- Q3 では、エルミート行列を対角化したときの対角行列の成分 λ_i ($i = 1, \dots, n$) についての説明がないものが多かったです。これらが実数であることを付記してください。

■ 次回予告

今回は、対称行列が直交行列により対角化可能であることを証明し、その理論を 2 次同次式で与えられる多変数関数の最大・最小値や極値を求める問題に応用します。

線形代数 3・第 10 回 (2025 年 6 月 16 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。