線形代数 4 演習問題

10-1. $\mathbb{R}$ 上で定義された何回でも微分可能な関数 $f = f(x)$ であって、微分方程式

$$f''' + 6f'' + 12f' + 8f = 0$$

を満たすもの全体からなるベクトル空間を V とおき、$D : V \longrightarrow V$ を

$$D(f) = f' \qquad (f \in V)$$

によって定義される V 上の線形変換とする。但し、$f',\ f'',\ f'''$ はそれぞれ f の導関数、第 2 次導関数、第 3 次導関数を表わす。任意の実数 a, b, c に対して $f(0) = a,\ f'(0) = b,\ f''(0) = c$ を満たす関数 $f \in V$ が唯一存在することから、$f_0, f_1, f_2 \in V$ を

$$\begin{array}{lll} f_0(0) = 1, & f_0'(0) = 0, & f_0''(0) = 0, \\ f_1(0) = 0, & f_1'(0) = 1, & f_1''(0) = 0, \\ f_2(0) = 0, & f_2'(0) = 0, & f_2''(0) = 1 \end{array}$$

を満たすものとすると、“f_0, f_1, f_2” は V の基底をなす。これを既知として以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $f \in V$ は $f = f(0)f_0 + f'(0)f_1 + f''(0)f_2$ と表わされることを示せ。

(2) V の基底 “f_0, f_1, f_2” に関する D の行列表示 A を求めよ。

(3) D の固有値とその重複度を求めよ。

線形代数４通信 [No.10] 2025年12月1日発行

■ 第９回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q1(2) は、ベクトル空間 V の中の部分空間 W_1, W_2, W_3 が直和になるための同値な条件を列挙する問題でした。[定理 9-1-5] の 3 条件を $l = 3$ の場合に書けばよいのですが、(iii) については $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0_V\}$ という誤答が多かったです。書くべき等式は、授業で説明したように、$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0_V\}$ です。
- ◦ Q3(1) では、抽象的な説明しか書かれていないシートがいくつかありました。各 W_i の基底が具体的に与えられていますから、それらのベクトルを並べる形で答えてください。
- ◦ Q3(3)(i) では、写像を定める「３点セット」が明記されていないものが多々ありました。この種の問題は何度も出題していますが、なかなか身につかないのは困ったものです....。

■ 演習 9-1(1) について

解答すべきことは、W_1 が部分空間であるための 3 条件を満たしていることの確認です。

(SS0) は次のように確かめることができます。まず、$V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の零ベクトル 0_V は 2 次の零行列 O であることに注意します。これが W_1 に属しているかどうかを確かめます。$a = b = 0$ とおくと $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ と表わされるので、確かに $\mathrm{O} \in W_1$ となっています。

次に、(SS1) を確認します。任意に $A, B \in W_1$ をとります (ここを間違えている人がまだ数名います)。W_1 の定義より、ある $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ を用いて $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ のように表わすことができます。行列の和の定義より $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ となるため、$A + B \in W_1$ がわかり、(SS1) の成立がわかります。(SS2) の成立も、具体的に成分で表示して、(SS1) のときと同様に示すことができます。

■ 演習 9-1(2) について

① $W_1 \cap W_2 = \{\mathrm{O}\}$ と ② $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) = W_1 + W_2$ の 2 条件が満たされることを確かめます。

①しか示されていない答案が多かったです。ここでは、②の証明について説明します。“$\supset$” は自明に成立するため、“$\subset$” を示します。

任意に $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ をとり、これを W_1 と W_2 の元の和で表わすことを考えます。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ とおいて、これが $A = X + Y$ $(X \in W_1,\ Y \in W_2)$ のように表わされるためには X, Y はどんな行列でなければならないのかを探ります。その結果、次の表わし方を見つけることができます：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c - b & d - a \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in W_1,\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c - b & d - a \end{pmatrix} \in W_2$ ですから、上式により A を W_1 と W_2 の元の和で表わすという目的が達せられたことになります。このようにして、②を示すことができます。

■ 次回予告

有限次元ベクトル空間上の線形変換 T が、上三角行列、対角行列により表わされるための必要十分条件（判定条件）を学びます。

線形代数４・第 10 回 (2025 年 12 月 1 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。