No.10 2025年11月26日

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎2) 演習問題

10-1. 次式で定義される長方形領域 $R=[0,1]\times[0,1]$ 上の関数 $f(x,y)=x\log y$ を考える。自然数 N を固定して、R の分割

$$\Delta : \begin{cases} 0<\frac{1}{N}<\frac{2}{N}<\cdots<\frac{N-1}{N}<1 \\ 0<\frac{1}{N}<\frac{2}{N}<\cdots<\frac{N-1}{N}<1 \end{cases}$$

を考え、各小長方形領域 $R_{ij}=[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}]\times[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}]$ から点 $\xi_{ij}=(\frac{i}{N},\frac{j}{N})$ を選んで点列 $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_{ij}\}$ を作る。リーマン和 $S(f;\Delta,\boldsymbol{\xi})$ を求めよ。

10-2. 次の重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[1,3]}(xy^2-2y)\,dxdy$

(2) $\displaystyle\int_{[-2,2]\times[0,2]}(xe^{-y}-ye^{x})\,dxdy$

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 通信　[No.10]

2025 年 11 月 26 日発行

■ 第 9 回の学習内容チェックシート Q3 について

当該の問題は、ヘッシアンを使っても (a,b) で極値をとるかとらないかが判定できないときには、どんな手段でそれを調べればよいかを答える問題でした。「(a,b) 付近での関数 $f(x,y)$ の様子を直接調べる」のような一言だけ記したシートが多数ありました。闇雲に調べるのは大変なので、(a,b) を通る直線や曲線のうち、関数 $f(x,y)$ が簡単になりそうなものを選んで、その直線や曲線上での $f(x,y)$ の変化の様子を調べます ([例 9-2-3] を参照)。もし、ある直線や曲線上に、(a,b) のいくらでも近くに $f(x_1,y_1)>f(a,b)$ となる点 (x_1,y_1) が見つかり、別の直線や曲線上に、(a,b) のいくらでも近くに $f(x_2,y_2)<f(a,b)$ となる点 (x_2,y_2) が見つかれば、関数 f は (a,b) で極値をとらないことがわかります (比較する値は 0 ではなく、$f(a,b)$ であることに注意しましょう)。このようなことを書いてください。

■ 演習 9-1 について

まず、偏導関数は $\dfrac{\partial f}{\partial x}=16x^3+6xy^2+y^3-8,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=6x^2y+3xy^2$ であり、第 2 次偏導関数は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=48x^2+6y^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12xy+3y^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x^2+6xy$ です。さすがにこれはよくできていました。問題は (3) です。

極値を与える点の候補を求めるために、方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を解きます。$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3xy(2x+y)$ のように因数分解できることから $x=0,\ y=0,\ y=-2x$ が導かれます。それぞれを $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ に代入して、関数 f の極値を与える点の候補 $(0,2),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$ が見つかります。

次に、このように求めた各点において f が実際に極値をとるのか否かを判定するために、ヘッシアン $(Hf)(x,y)$ を計算します。$(Hf)(x,y)=36x(8x^2+y^2)(x+y)-9y^2(4x+y)^2$ に各点での値を代入していきます。

まず、$(\mathrm{H}f)(0,2)=-144<0$ となるので、f は点 $(0,2)$ で極値をとらないことがわかります。次に、$(\mathrm{H}f)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)=\dfrac{144}{\sqrt[3]{2}}>0$ であり、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)=\dfrac{48}{\sqrt[3]{4}}>0$ であることから、f は点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$ で極小であり、極小値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)=-\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$ であることがわかります。最後に、点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$ におけるヘッシアンの値を計算します。値がやや複雑なので、$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ とおくと、$(\mathrm{H}f)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)=36a(8a^2+4a^2)(a-2a)-9\cdot 4a^2(4a-2a)^2=-576a^4<0$ となることがわかります。したがって、f は点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$ では極値をとらないことがわかります。ヘッシアン判定法では、ヘッシアンの符号が必要なのであって、正確な値ではありません。正確な値を求めなくても、正となるのか負となるのかがはっきりわかるところまで計算することが重要です。

■ 次回予告

次回は、必ずしも長方形でない有界閉集合上での重積分を扱います。特に、x-軸 に平行な 2 直線と 2 つの 1 変数関数 $y=h(x),\ y=k(x)$ のグラフで囲まれた領域 (これを縦線領域といいます) 上での重積分が 1 変数関数の定積分を 2 回行うことにより求められることを学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 10 回 (2025 年 11 月 26 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。