

基礎数学演義1 第11回・問題解答&要約シート(1)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q11-1. O を原点とする座標平面上に2点 A, B があり、3点 O, A, B は同一直線上にないものとする。 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ とおき、また、 $\theta = \angle AOB$ ($0 < \theta < \pi$) とおく。

(1) $AB^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle$ を、 $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ を用いて表わせ。

(2) 三角形 $\triangle OAB$ に余弦定理を適用して、 AB^2 を $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \cos \theta$ を用いて表わせ。

(3) (1) と (2) の結果を合わせることで、 $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$ と表わされることがわかる。

θ を \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角という。

① $A(3, -4), B(4, 3)$ のとき、 \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を求めよ。

② $A(1, 2)$ のとき、 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ となる点 B の存在範囲を図示せよ。

Q11-2. \mathbb{R}^3 における2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方に直交するような $\mathbf{0}$ でない3次ベクトルを1つ求めよ。

(2) “ \mathbf{a}, \mathbf{b} ” が一次独立であることを確かめ、 \mathbf{a}, \mathbf{b} によって張られる平行四辺形の面積 S を求めよ。

基礎数学演義1 第11回・問題解答&要約シート(2)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q11-3. \mathbb{R}^3 における3つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) “ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ” は一次独立であることを示せ。

(2) 行列 $A = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$ の行列式を計算することにより、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ によって張られる平行六面体の体積 V を求めよ。

Q11-4. 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ が定める線形変換 $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と、 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ により張られる平行四辺形 P について考える。

(1) $T_A(P)$ はどのような2つのベクトルにより張られる平行四辺形になるか。

(2) P の面積と $T_A(P)$ の面積、およびそれらの面積比を求めよ。

(3) 行列式 $|A|$ の値を求め、 $|A|$ と $P, T_A(P)$ の面積の間にどのような関係が成り立つかを述べよ。