No.11 2024 年 12 月 5 日

線形代数 2 演習問題

11-1. (一次独立)

関数 $v_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ を

$$v_1(x) = e^x, \quad v_2(x) = \cos x, \quad v_3(x) = \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。"v_1, v_2, v_3" は一次独立であることを示せ。

11-2. (部分空間とその基底)

漸化式 $a_{n+3} + 7a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなる集合を W とおく：

$$W = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R}) \mid a_{n+3} + 7a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)\}.$$

(1) W はベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

(2) W の次元とその一組の基底を求めよ。

線形代数２通信 [No.11]

2024 年 12 月 5 日発行

■ 第 10 回学習内容チェックシートについて

- ∘ Q1 はベクトル空間の公理を列挙する問題でした。(VS2) の部分を (VS3) と同じ形で「任意の $v \in V$ に対して、$v + 0_V = v = 0_V + v$ を満たす元 $0_V \in V$ が存在する」のように書くと意味が変わってしまい、誤りになります。この形式で書くのであれば、読点は「に対して」の後ではなく、「満たす」の後につけなければなりません。
- ∘ Q2 の表における 0_V の欄の Map$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のところに、単に $\underline{0}$ と記入したものがありましたが、「ただし」と書いて、[例 10-1-4] を参考に、元の対応規則を付け加えてください。

  関数 $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v(x) = e^x\ (x \in \mathbb{R})$ に対する $-v$ の定義を正確に書けなかった人も多かったです。$-v$ は各 $x \in \mathbb{R}$ を $-e^x \in \mathbb{R}$ に写す関数です。解答としては、v の書き方を真似て $-v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (-v)(x) = -e^x\ (x \in \mathbb{R})$ のように書いてください。

■ 演習問題 10-1 について

この問題のように基礎的なことを証明する際には、一つ一つの計算においてそれが成立する根拠を明らかにしながら書くことが大切です。問題の等式は次のように導くことができます。

$$t(u-v) \underset{①}{=} t\bigl(u+(-v)\bigr) \underset{②}{=} tu + t(-v) \underset{③}{=} tu + (-tv) \underset{④}{=} tu - tv.$$

①と④の等号成立はベクトルの差の定義 (10-2 a) に基づきます。②はベクトル空間におけるスカラーの分配法則 (VS1)(iii) に基づきます。③はベクトル空間の公理から導かれる [補題 10-2-1](3)④に基づきます。その等式の導出方法は、pre10-1 のヒントと略解を見てください。

■ 演習問題 10-2 について

(SS0) が満たされることを確認するためには、まず、全体のベクトル空間 $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の零ベクトル 0_V が何なのかを考えなければなりません。今の場合、0_V は $0 \in \mathbb{R}$ への定数関数 $\underline{0}$ ですから、これが W に属することを確認します。定数関数の微分はゼロであることから、$x^2 \frac{d^2\underline{0}}{dx^2} - x\frac{d\underline{0}}{dx} - 3\underline{0} = x^2\underline{0} - x\underline{0} - 3\underline{0} = \underline{0}$ が導かれます。これより、$0_V = \underline{0} \in W$ が従います。

(SS1) が満たされることを確認するためには、「任意に $f, g \in W$ をとる」と宣言することから始めます。目標は $f + g \in W$ を示すことです。そのために、$x^2\frac{d^2(f+g)}{dx^2} - x\frac{d(f+g)}{dx} - 3(f+g)$ を計算してゼロになることを確かめます。微分の線形性より $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},\ \frac{d^2(f+g)}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2g}{dx^2}$ が成り立ちます。これと $f, g \in W$ を用いて

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2(f+g)}{dx^2} - x\frac{d(f+g)}{dx} - 3(f+g) &= x^2\Bigl(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2g}{dx^2}\Bigr) - x\Bigl(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}\Bigr) - 3(f+g) \\ &= \Bigl(x^2\frac{d^2f}{dx^2} - x\frac{df}{dx} - 3f\Bigr) + \Bigl(x^2\frac{d^2g}{dx^2} - x\frac{dg}{dx} - 3g\Bigr) \\ &= \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \end{aligned}$$

が得られます。こうして、$f + g \in W$ が確かめられます。

(SS1) と同じ要領で、任意の $f \in W$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $x^2\frac{d^2(tf)}{dx^2} - x\frac{d(tf)}{dx} - 3(tf) = \underline{0}$ が導かれるため、$tX \in W$ とわかり、(SS2) も満たされることがわかります。

■ 次回予告

次回は、ベクトル空間の間の線形写像について学びます。有限次元ベクトル空間の間の線形写像が、定義域と終域の基底を指定することによって、行列で表わされることを学びます。

線形代数２・第 11 回 (2024 年 12 月 5 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。