

線形代数 3 演習問題

11-1. 関数 $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -5x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 12xy + 12xz - 24yz.$$

- (1) すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ を満たす、対称行列 A を求めよ。
- (2) (1) で求めた対称行列 A の固有値を求めよ。
- (3) 条件 $2(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ の下で、関数 q の最小値を求めよ。

■ 演習 10-1 について

特別に難しい行列式ではないにも関わらず、 $\Delta_A(x)$ の計算ができなかった人が数名いました。昨年からの繰り返し教えています、すぐにサラスに走るのではなく、0 を増やしてから余因子展開することを心がけてください。問題の行列 A の固有多項式 $\Delta_A(x)$ については、第 2 行と第 3 行を第 1 行に加える（足しあげる）ことをしてみましょう。すると、 $x-1$ を括り出すことができ、さらに、第 1 列の -1 倍を第 2 列と第 3 列に加えてから余因子展開することで、 $\Delta_A(x) = (x-1)(x^2-x+1)$ を得ることができます。 $\Delta_A(x) = 0$ を解いて、 A の $\mathbb{C}$ における固有値は $1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ であることがわかります。特に、 A は 1 を固有値にもち、また、直交行列であることが列ベクトルの内積を計算することによりわかるので、 T_A は回転移動になります。

回転軸は、固有値 1 に属する固有ベクトルを方向ベクトルに持つ、原点を通る直線です。この直線は固有空間 $W(1, T_A)$ に他なりません。連立一次方程式 $(1 \cdot E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、 $W(1, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ が求められるので、これが T_A の回転軸になります。

回転角は $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right)$ と書き換えられることから、 $\frac{\pi}{3}$ か $-\frac{\pi}{3}$ のどちらかです。どちらが正解なのかは、実は回転角の定義によります。通常、回転角は、右手の中指の方向を回転軸の大きさ 1 の方向ベクトル $\mathbf{r}$ に合わせたときの、 $\mathbf{r}$ に直交する平面上で親指が回転する角度により定めます。これに基づくと、 T_A の回転角は $\frac{\pi}{3}$ と定まります。なぜなら、 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ に対して、 $W(\alpha, T_A^{\mathbb{C}})$ の正規直交基底 $\mathbf{u}_1$ をとり、pre10-1 のヒントと略解のように $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$ を定めて $P := (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{q}_1 \ \mathbf{r})$ の行列式を計算すると、1 になっているからです。ちなみに、 $A\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_1$, $A\mathbf{q}_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{q}_1$ であり、 $A\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$, $A\mathbf{q}_1 = -\mathbf{p}_1$ にはなりません。

■ 第 10 回学習内容チェックシートについて

- Q2(1) については、「 T の固有ベクトルからなる V の基底が存在する」と書けば十分です。
- Q3(1) と (2) はそれぞれ 2 次と 3 次の場合の直交行列の標準形を書く問題でしたが、 n 次の場合のまま答えた人が半数以上いました。[定理 10-3-1] により、2 次正方行列 $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, 1, -1 の可能な組み合わせを考えればよいことになります。 $n = 2$ の場合には、 R_θ , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の 4 通りが考えられます。このうち、真ん中の 2 つはそれぞれ R_0 , R_π と表わされるため、 R_θ に含まれます。したがって、 $n = 2$ の場合には、 R_θ ($\theta \in \mathbb{R}$) か $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の形にまで単純化することができます。同様に考えて、 $n = 3$ の場合には $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) の形にまで単純化することができます。

■ 次回予告

数Ⅲにおいて楕円や双曲線を学んだときには、方程式 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ の形で与えられるものしか扱いませんでした。今回は、対称行列が回転行列により対角化可能であることの図形への応用として、 xy の項を含む 2 次式で与えられる曲線の標準化の問題を考察します。

線形代数3・第11回(2025年6月23日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。